R

<36622212520016
<36622212520016
Bayer. Staatsbibliothek

Math P. 441

Mathesis. Trigonometria 320.

R

Johann Georg Prändels
öffentlichen Repetitors der Mathematik auf dem chur-
fürstl. Schulhause zu München

Kugldreyeckslehre
und
höhere Mathematik
samme
ihrer kleinen Geschichte.

Mit 4 Kupfertafeln.

München, 1793.
Bey Joseph Lentner.

Nro 1313.

Kugldreyeckslehre und höhere Mathematik. Von Joh. Georg Prändl, Repetitor.

Imprimatur.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

Bayerische Staatsbibliothek München

München im churfürstl. Büchercensur-Collegium, den 10ten August 1793.

Regist. Fol. 173.

F. X. Graff,
wirkl. Rath und Sekretär.

Vorrede.

Wie vielen und namhaften Schwierigkeiten die alltägliche Forderung unterworfen sey, in irgend einem Fache die schicklichste Mittelbahn zu treffen, liegt schon bey dem unbedeutensten Geschäfte zu hell am Tage, als daß so etwas erst von Bearbeitern mathematischer Lehrgebäude zum voraus erwähnt werden dörfte. Man soll sich, so viel möglich, auf Kürze befleißigen; und doch dabey weder Vollständigkeit des Systems, noch faßlichen Vortrag aus den Augen lassen. Reine Mathematik, heißt es ferner, muß immer das Gepräge der strengen Theorie ohne Anwendung behaupten; und doch dabey nicht in gar zu abstrakte Trockenheit verfallen. In der höhern Geometrie scheint zu Erlangung eines tiefern Blickes in die geheimen Verhältniße der Linien untereinander nichts

zuträg-

zuträglicher zu seyn, als die Eigenschaften der Kurven unmittelbar aus ihren Gesetzen kennen zu lernen; aber es darf dabey nicht vergeßen werden, den Anfängern der Analyse in dem hier, so zu reden, eigen dazu angewiesnem Felde zu zeigen, wie nun endlich von den Sätzen der Differential- und Integralrechnung überall häufiger Gebrauch gemacht werden könne; damit sie uns nicht mit gutem Fuge vorwerfen müssen, sie hätten sich der Erlernung derselben umsonst unterzogen. Schon die Beweisführungen für sich allein, sollen sie je den ohnehin schüchternen Kandidaten der Mathematik gleich beym ersten Anblick nicht vollends zurückschrecken, verlangen in präciser Form dargestellt zu werden; indeß sein ungeübter Verstand beym Durchstudieren nichts sehnlicher, als die umständlichste Auseinandersetzung aller Bestandtheile derselben erwartet. Ich beherzigte sie wohl diese drey Punkte, und hatte sie bey der Bearbeitung dieses Werkes stäts vor Augen: in wie fern sie Einfluß auf einen gewünschten Mittelweg hatten, erwarte ich von dem Ausspruche unpartheyischer Kenner.

Vorrede.

Man mag mir etwa vorwerfen, ich hätte mich zu viel mit Anwendung der Differential- und Integralrechnung abgegeben. Aber wenn man bedenkt, daß dieß mit guter Absicht geschah, um nämlich fürs erste Gelegenheit zu geben, sich mehr in dem edelsten Zweige der Mathematik zu üben, welches bis daher in so wenigen Lehrbüchern noch geschehen ist; und zweytens, um auf doppeltem Wege zur Wahrheit zu gelangen, wodurch ebenfalls wieder die Richtigkeit der Rechnung des Unendlichen dargethan wird; so, denke ich, verliert der Einwurf viel, wo nicht das Meiste von seinem Gewichte. Indeß können die meisten derselben von jedermann, der weitläuftigen Kalkulierungen abholde ist, des Systemes unbeschadet, auch weggelassen werden.

Was ich in Hinsicht der allgebraischen Beweisarten, der Ordnung, der Geschichte, der Vollständigkeit, der Veranlassung zur Herausgabe, u. d. gl. noch zu sagen hätte, ist schon in der Vorrede zu meiner Elementargeometrie gemeldet worden, und braucht also dießmal keiner Erwähnung mehr.

Ich

Vorrede.

Ich schmeichle mir, daß man manches Neue in selben finden wird, und daß das Werk durchgehends nach eignem Zuschnitte, vorzüglich in Rücksicht der vielen Beyspiele, die ich alle selbst entworfen, und sehr mühsam durchrechnete, bearbeitet worden. Freunde der guten Sache werden meine Arbeit gewiß nicht mißkennen, und habe ich einmal den Beyfall von dieser bessern und edleren Menschenklasse, o dann gebe ich mich gerne zufrieden, und bin taub zu dem Gekrächze der übrigen misantropischen Rabengeschöpfe.

Schriebs

München den 3ten August 1793.

Der Verfasser.

Ueber-

Ueberblick
der in diesem Bande abgehandelten Materien.

Kugldreyeckslehre.

Seite

1) Vorbegriffe I

2) Nähere Sätze zur Berechnung der Kugldreyecke, und zwar der rechtwinklichten IV

3) Von schiefwinklichten Kugldreyecken . . . XII

4) Eine abgezogene Anweisung aus den gegebenen geographischen Längen und Breiten zwoer Oerter, ihre Entfernung von einander zu finden . . . XXII

Höhere Mathematik.

1) Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktionen 2

2) Vorbegriffe vom Unendlich-Großen und Kleinen . 5

3) Differentialrechnung 10

3) Etwas vom größten und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung 20

Integralrechnung 25

Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung 30

Höhe-

Seite

Höhere Geometrie.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien . . .	40
Von Kegelschnitten	44
Von der Parabel	44
Von der Ellipse	80
Von der Hyperbel	136
Von der Logistik oder der logarithmischen Linie . .	171
Von der umgekehrten Methode der Tangenten . .	185
Geschichte der Kuglbreyeckslehre	191
Geschichte der höhern Mathematik	194

Kugel=

Kugeldreyeckslehre.

Vorbegriffe.

§. 1. Erklärung.

Sie ist die Wissenschaft, aus drey gegebnen Theilen eines Kugeldreyecks die übrigen durch Rechnung zu bestimmen.

§. 2. Erkl. Ein Kugeldreyeck ist ein von drey Bögen gröster Zirkel auf der Oberfläche der Kugel eingeschloßner Raum.

§. 3. Zusatz. Diese Lehre unterscheidet sich von der ebnen Trigonometrie dadurch, daß die Dreyecke in keiner Ebne, sondern auf der Kugelfläche liegen, und daß die gegebnen Stücke auch drey Winkel seyn können.

§. 4. Zusatz. Daß die Seiten eines solchen Kugeldreyecks Bögen gröster Zirkel seyn müssen, die einerley Diameter haben, wird daraus begreiflich, weil nur in diesem Falle eine Vergleichung der trigonometrischen Linien statt haben kann.

§. 5. **Lehrsatz.** Jeder gröste Zirkel theilt die Kugel in zween gleiche Theile.

Beweis. Es ist in der Geometrie erwiesen, daß jede gerade Linie, die durch den Mittelpunkt eines Zirkels geht, denselben in zween gleiche Theile theile; was dort von Linien gilt, das gilt bey Körpern von ihren abstammenden Flächen; nun die Fläche eines grösten Zirkels geht durch den Mittelpunkt der Kugel, also theilt er sie in zween gleiche Theile.

§. 6. **Lehrsatz.** Zween gröste Zirkel theilen sich in gleiche Theile.

Beweis. Erwiesen ist, daß sich zwo gröste Sehnen eines Planzirkels in zween gleiche Theile theilen. Man kann sich aber diese Sehnen als Durchmesser neuer Zirkel vorstellen, die in was immer für einer Richtung durch die Ebne gelegt sind; folglich müssen sich auch diese sowohl in Rücksicht der Peripherien, als der Flächen halbieren.

§. 7. **Zusatz.** Wenn sich nun zwo schneidende gröste Kugelflächen im Mittelpunkte der Kugel begegnen, so entsteht eine Neigung wovon die Bögen die Gränzen sind. Diese Flächenneigung nun oder Bögenneigung heißt ein sphärischer Winkel.

§. 8. **Lehrsatz.** Wenn die Schenkel eines sphärischen Winkels bis zu jenem Vertikalbogen fortgeführt werden, der 90° vom Winkel entfernt ist, so bestimmt dieser abgeschnittne Bogen das Maas des Winkels.

Satz. Fig. 1

$$df = o$$

Beweis.

Beweis.

	dcf = df	denn dieser Bogen ist aus dem Scheitelpunkte beschrieben.
aber	dcf = o	wegen einerley Neigung
also	df = o	.

§. 9. Erkl. Der Pol eines Zirkels heißt jener Punkt auf der Kugel, welcher auf allen Seiten vom Zirkel gleich weit, oder 90° entfernt ist, weil hier nur von gröſten Zirkeln die Rede ist.

§. 10. Zusatz. Da auf der entgegengesetzten Seite der Kugel auch ein solcher Punkt möglich ist, so hat jeder gröſte Zirkel zween Pole.

§. 11. Zusatz. Die gerade Linie von einem Pole zum andern muß nothwendig ein Diameter der Kugel seyn; weil sie 180° von einander entfernt sind.

§. 12. Lehrsatz. Ein Zirkel, der durch die Pole eines andern geht, durchschneidet ihn perpendikulär.

Beweis. Die Flächenneigungen sind aus der Bedingung des Pols §. 9 beyderseits einander gleich, und zwar 90°, also schneidet ein solcher Zirkel den andern unter einem rechten Winkel, das ist perpendikulär.

§. 13. Lehrsatz. Die sphärischen Nebenwinkel machen zusamm 180°, und die Vertikalwinkel sind gleich.

Beweis. Die sphärischen Winkel kommen mit den Neigungsflächen ihrer Zirkel übereins; für

für diese nun gelten die Beweise der Planimetrie, also auch für jene.

§. 14. Erkl. Es giebt zweyerley Kugeldreyecke. Rechtwinklichte und schiefwinklichte. Von der ersten Gattung sind sie, wenn sich ein oder mehrere rechte Winkel darin vorfinden, im widrigen Falle gehören sie zur andern Gattung. Die Benennungen der Seiten in rechtwinklichten Dreyecken ist die nämliche wie bey Ebnen. Wenn die Lothen oder Perpendikel beyde entweder mehr oder weniger als 90° halten, so heissen sie gleichartig.

§. 15. Lehrsatz. Es kann keine Seite 180°, oder darüber halten.

Beweis. Die Seiten sind Bögen gröster Zirkel. Diese schneiden sich in ihrer Mitte, das ist in einer Entfernung von 180° §. 6. Schneidet nun ein dritter Bogen, wo, und wie er will die zween Halbbögen zu einem Kugeldreyecke, so giebt es Theile von selben; also kann nirgend ein Halbzirkel die Seite zu sphärischen Dreyecken werden.

Nähere Sätze zur Berechnung der Kugeldreyecke und zwar der rechtwinklichten.

§. 16. Erkl. Man kann in einem rechtwinklichten Dreyecke, mit Wolfen mittlere, anliegende und abgesönderte Theile betrachten. Mittlere Theile sind die, welche lediglich zwischen zwey andern Theilen liegen. Diese Theile, zwischen welchen sich der mittlere Theil befindet, heissen die anliegenden. Was aber weder ein mittlerer Theil, noch ein anliegender heissen kann, dieß nennt man abgeson-

gesonderte; wo der rechte Winkel nie darunter gezählt werden darf. Wenn schiefwinklichte Dreyecke durch einen Perpendikel in zwey rechtwinklichte zerfällt werden, so läßt sich auch dort diese Eintheilung anbringen. In jedem rechtwinklichten Dreyecke giebt es fünf Fälle, wenn nämlich jedesmal ein anders von den fünf Stücken, — den der rechte Winkel ist abgerechnet, — als mittlerer Theil betrachtet wird. Z. B. Fig. 2

	Mittlere.	Anliegende.	Abgesönderte.
1)	ab	ac, b	bc, c
2)	b	ab, bc	ac, c
3)	bc	b, c	ab, ac
4)	c	bc, ac	b, ab
5)	ac	c ab	bc, b

§. 17. Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich der Radius zum Sinus der Hypothenuse, als wie der Sinus eines schiefen Winkels zum Sinus der überstehenden Seite.

Satz. Fig. 3

r : sin ad = sin d : sin af

Beweis.

Man ziehe die gehörigen Linien, so werden sie ein rechtwinklichtes ebnes Dreyeck vorstellen, worinn

sin b : ac = sin m : ab

subſtit. r : sin ad = sin d : sin af

§. 18. Anmerk. Der Beweis läßt sich noch anders führen, aber dieser däucht mir der kürzeste und natürlichste zu seyn.

§. 19. Anmerk. Kraft dieses Lehrsatzes wären wir wirklich schon im Stande so manche Aufgabe zu lösen: doch brauchen wir ihn hier nur zur Einleitung zweyer Hauptregeln, nach welchen alle Fälle berechnet werden können.

§. 20. Lehrsatz. Wenn man mit Wolfen die Komplemente der Perpendikel für die Perpendikel selbst setzt, so gleicht allemal das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils dem Produkte der Sinusse der abgesonderten Theile. Der Fall ist dreyfach: 1) Wenn die Hypothenuse 2) einer von den Perpendikeln 3) ein schiefer Winkel der mittlere Theil ist

I Satz. Fig. 4

$$r \times \cos ac = \sin cd \times \sin bg$$

Beweis.

Man ergänze die Bögen zu Quadranten, so geben die Komplemente ein neues rechtwinklichtes Dreyeck ab, weil a der Pol des Quadranten dg folglich des ganzen Zirkels ist, wo sich für die Winkel bey g und f keine andere Maase als die Entfernung vom Pol bis zum Zirkel, das ist, Quadranten beschreiben lassen. Es ist demnach in dem Dreyeck cdf

$$\sin f : \sin dc = \sin d : \sin cf$$

oder

$$r : \sin dc = \sin bg : \cos ac$$

$$r \times \cos ac = \sin cd \times \sin bg$$

II Satz.

$$r \times \cos bg = \sin ac \times \sin c$$

Beweis.

In dem Dreyecke abc selbst ist

$$\sin b : \sin ac = \sin c : \sin ab$$

oder $$r : \sin ac = \sin c : \cos bg$$

$$r \times \cos bg = \sin ac \times \sin c$$

III Satz.

$$r \times \cos a = \sin c \times \sin dc$$

Beweis.

Es sey alles wie vorhin, so ist

$$\sin o : \sin df = \sin f : \sin dc$$

oder $$\sin c : \cos a = r : \sin dc$$

$$r \times \cos a = \sin c \times \sin dc$$

§. 21. Zusatz. Weil jeder Theil des Dreyecks — ausser dem rechten Winkel — ein mittlerer Theil seyn kann, so giebt dieser Lehrsatz 5 Gleichungen. Sie heissen

1) $r \times \cos ac = \sin ab \times \sin bc$
2) $r \times \cos ab = \sin ac \times \sin c$
3) $r \times \cos bc = \sin a \times \sin ac$
4) $r \times \cos a = \sin c \times \sin bc$
5) $r \times \cos c = \sin a \times \sin ab$

weil ferner in jeder Gleichung ein jedes der dreyen Glieder unbekannt seyn kann, so läßt sich auch jede Gleichung auf 3 Fälle nutzen, welches in allem 15 Fälle giebt. Ein fruchtbarer Lehrsatz!

§. 22.

§. 22. Anmerk. Eine kleine Anwendung auf die gemeine Astronomie soll diese Fälle in etwas erläutern. Es ist bekannt daß der Aequator, die Ekliptik und der Meridian gröste Zirkel der Weltkugel sind. Weil nun der Meridian überall durch den Pol des Aequators beschrieben wird, so schneidet er diesen rechtwinklicht. Der Winkel, welchen der Aequator mit der Ekliptik macht, heißt die Schiefe der Ekliptik; ein Stück oder Bogen des Aequators zwischen der Schiefe und einem Meridian heißt die Recktascension der Sonne, oder die gerade Auffsteigung; der Bogen der Ekliptik zwischen der Schiefe und dem Meridian, giebt den Ort der Sonne, oder ihre Vorrückung, der Bogen des Meridians zwischen der Ekliptik und dem Aequator ist die Deklination der Sonne, und der zweyte schiefe Winkel wird der Meridianwinkel genennt. In unsrer 4ten Figur dörfte c die Schiefe, b c die Recktascension, a b die Deklination, a den Meridianwinkel, und a c den Ort der Sonne vorstellen.

§. 23. Aufgabe. Es sey die Declination der Sonne 12°33', wie weit ist selbe in der Ekliptik bereits vorgerückt?

Auflösung. Weil die Schiefe der Ekliptik schon als bekannt vorausgesetzt wird, und 23°29' beträgt, so nehme man die Deklination als einen mittleren Theil an, und dann werden die Vorrückung und die Schiefe abgesonderte Theile seyn.

$$r \times \sin ab = \sin ac \times \sin c$$

$$\frac{r \times \sin ab}{\sin c} = \sin ac$$

$$\text{Log } r + \sin ab = 19{,}3364749$$

$$\text{Log } \sin c \qquad 9{,}6004090$$

$$9\;7360659 = \text{Log } \sin 33^{\circ}$$

§. 24. Anmerk. Ich habe deswegen *sin ab* gesetzt, weil a b ein Perpendikel ist; folglich sein Komplement dafür genommen wird. Der Kosinus des Komplements aber ist nichts anders als der Sinus des Perpendikels.

§. 25. Lehrsatz. In jedem rechtwinklichten Kugeldreyecke verhält sich die Tangente eines Winkels zum Radius, wie die Tangente des überstehenden Perpendikels zum Sinus des andern Perpendikels.

Satz.

Satz. Fig. 5

$$\text{tang } b : r = \text{tang } gd : \sin db$$

Beweis.

Die $\Delta\, kch \backsim \Delta\, fad$ wegen rechten, und gleichen Neigungswinkeln

also $kh : hc = fd : da$

substit. $\text{tang } b : r = \text{tang } gd : \sin db$

§. 26. Lehrsatz. Das Produkt aus dem Radius in den Sinus eines Perpendikels ist gleich dem Produkt aus der Tangente des andern Perpendikels in die Kotangente des überstehenden Winkels.

Satz. Fig. 5

$$r \times \sin db = \text{tang } gd \times \cot b$$

Beweis.

$\text{tang } b : r = \text{tang } gd : \sin db$

aber $\text{tang } b : r = r : \cot b$ §. 30 eb. Trig.

$r : \cot b = \text{tang } gd : \sin db$

$r \times \sin db = \text{tang } gd \times \cot b$

§. 27. Anmerk. Beyde Beweise und Lehrsätze hätten wegbleiben, und in den Beweis des folgenden Lehrsatzes mit unter gewebt werden können; aber ich wollte sie geflissentlich aussetzen, theils die Beweise abzukürzen, theils mehrere Formeln zu tieferen Spekulationen zu gewinnen.

§. 28. Lehrsatz. Wenn man mehrmal mit Wolfen für die Perpendikel ihre Komplemente nimmt, so ist allemal in rechtwinklichten Kugeldreyecken das Produkt aus dem Radius in dem Kosin des mittleren Theils gleich dem Produkt

der

der Kotangenten der anliegenden Theile. Der Fall ist ebenfalls dreyfach: 1) Wenn ein Schenkel 2) ein Winkel 3) die Hypothenuse ein mittlerer Theil ist.

I Satz Fig. 4

$$r \times \cos cd = \cot c \times \cot bg$$

Beweis.

In dem Dreyecke abc ist nach §. 26

$$r \times \sin bc = \cot c \times \tan ab$$

substit. $r \times \cos cd = \cot c \times \cot bg$

II Satz.

$$r \times \cos a = \cot ac \times \cot bg$$

Beweis.

Im Dreyeck der Komplimentsbögen ist

$$r \times \sin df = \tan cf \times \cot d \quad §. 26$$

oder $r \times \cos a = \cot ac \times \cot bg$

III Satz.

$$r \times \cos ac = \cot a \times \cot c$$

Beweis.

Es ist wieder in dem Dreyeck der Komplementsbögen

$$r \times \sin cf = \tan df \times \cot c$$

oder $r \times \cos ac = \cot a \times \cot c$

§. 29.

§. 29. Zusatz. Aus diesem Lehrsatze können wiederum 5 Gleichungen, und in allem wie oben 15 Fälle abgeleitet werden. Z. B.

1) r × cos ac = cot a × cot c
2) r × cos bc = cot c × cot ab
3) r × cos ab = cot a × cot bc
4) r × cos a = cot ab × cot ac
5) r × cos c = cot ac × cot bc

§. 30. Zusatz. Beyde Universalregeln lassen sich in diesen einzigen Ausdruck zusamm ziehen: Das Produkt aus dem Radius in den Kosinus des mittleren Theils ist gleich dem Produkt, entweder aus den Kotangenten der anliegenden, oder aus den Sinussen der abgesonderten Theile.

§. 31. Aufgabe. Die gerade Aufsteigung beträgt 39°22', wie groß ist die Deklination der Sonne?

Auflösung. Weil die gerade Aufsteigung Fig. 4 der mittlere Theil = bc, die beyden anliegenden aber die Schiefe der Ekliptik = c, und die Deklination = ab = x ist, so ist die Gleichung logarithmisch ausgedrückt

Log sin tot + Log sin bc = Log cot c + Log tang x
Log sin tot + Log sin 39°22' = Log cot 23°29' + Log tang x

Log sin tot = 10,0000000
Log sin 39°22' = 9,8022816
19,8022816
Log cot 23°,29' 10,3620437
9,4402379 = Log tang x

welcher Tangente ein Bogen von 16°24' zugehört, und hier die Größe der Deklination angiebt.

§. 32.

§. 32. Anmerk. Da b c und x Perpendikel sind, und Kosinus und Kotangente der Komplementsbogen, die hier genommen werden müssen, nichts anders als Sinus und Tangens der wahren Bögen vorstellen, so sind sin b c und Tang x rechtmäßige Ausdrücke in obiger Gleichung.

§. 33. Anmerk. Auf diese Art lassen sich alle Aufgaben die in rechtwinklichten Dreyecken vorkommen können, auflösen.

Von schiefwinklichten Kugeldreyecken.

§. 34. Erkl. Ein schiefwinklichtes Kugeldreyeck wird in zwey rechtwinklichte zerfällt, wenn aus einem der Winkel auf die gegenüberstehende Seite ein Perpendikel, das ist, ein Vertikalbogen herabgefällt wird, wo auch manchmal die Seite verlängert werden muß.

§. 35. Zusatz. Es lassen sich also durchaus die beyden oben gegebnen Regeln, die wir auch endlich §. 30 in eine einzige zusamm gezogen haben, bey schiefwinklichten Dreyecken ebenfalls anwenden. Es kömmt alles dabey auf die geschickteste Art an, mit der man zu Werke geht.

§. 36. Aufgaben. 1) Aus Winkeln und Seiten, die einander entgegen stehen, ein viertes Stück zu finden. 2) Aus einer Seite und den darauf liegenden Winkeln; 3) aus einem Winkel und den einschliessenden Seiten; 4) aus allen drey Seiten; 5) aus allen 3 Winkeln, das übrige zu finden.

Auflösung des ersten Falles. Kürze halber nutze man hier den Lehrsatz: Die Sinusse der Seiten stehen mit den Sinussen der ihnen entgegen-

stehen-

stehenden Winkeln in Verhältniß, welchen Satz wir auch zum Ueberfluße, besonders bey schiefwinklichten Dreyecken erweisen wollen.

Satz. Fig. 6

$$\sin ab : \sin bc = \sin c : \sin a$$

Beweis.

Man söndere die beyden Seiten durch einen Perpendikel von einander ab, so ist

1) $\sin a : \sin bd = r : \sin ab$

$$\sin bd = \frac{\sin a \times \sin ab}{r}$$

2) $\sin c : \sin bd = r : \sin bc$

$$\sin bd = \frac{\sin c \times \sin bc}{r}$$

Nun ist also

$$\frac{\sin a \times \sin ab}{r} = \frac{\sin c \times \sin bc}{r}$$

$\times r$ $\quad \sin a \times \sin ab = \sin c \times \sin bc$

oder in einer Proportion

$$\sin ab : \sin bc = \sin c : \sin a$$

Zweyter Fall. Wenn eine Seite und die darauf liegenden Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 6 A, b und c gegeben.

Auflösung. Man fälle aus einem den Perpendikel auf die Gegenseite, so entstehen 2 Dreyecke mit rechten Winkeln, woraus sich nach und nach gemäß der obigen Universalregel, und dem ersten Falle alles finden läßt. Denn es ist

1)

1) $r \times \cos A = \cot c \times \cot o$ §. 30.

$$\frac{r \times \cos A}{\cot c} = \cot o$$

Wird o von b abgezogen, so hat man auch x

2) $r \times \cos o = \cot A \times \tan P$

$$\frac{r \times \cos o}{\cot A} = \tan P$$

3) $r \times \cos x = \tan P \times \cot C$

$$\frac{r \times \cos x}{\tan P} = \cot C$$

4) $\sin c : \sin C = \sin b : \sin B$

$$\frac{\sin C \times \sin b}{\sin c} = \sin B$$

5) $\sin c : \sin C = \sin a : \sin A$

$$\frac{\sin c \times \sin A}{\sin C} = \sin a$$

§. 37. Anmerk. Man sieht hieraus, daß es auch andere Wege geben könne, wo durch die nämliche Regel die Stücke nach und nach gefunden werden. Die Uebung wird am Ende von selbst den kürzesten zeigen.

Dritter Fall. Wenn zwo Seiten sammt den eingeschlossenen Winkel gegeben sind. Z. B. es sey Fig. 7 bekannt A, B und c.

Auflösung. Es werde auf eine der gegebnen Seiten vom Gegenwinkel aus ein Perpendikel gefällt, so ist, wenn das größere Segment x heißt

1) $r \times \cos c = \cot A \times \tan x$

$$\frac{r \times \cos c}{\cot A} = \tan x$$

Dieß abgezogen von B giebt das Stück $B - x$

2)

2) $r \times \sin x = \cot c \times \tang P$

$$\frac{r \times \sin x}{\cot c} = \tang P$$

3) $r \times \sin (B - x) = \cot a \times \tang P$

$$\frac{r \times \sin (B - x)}{\tang P} = \cot a$$

4) $\sin a : \sin A = \sin c : \sin C$

$$\frac{\sin A \times \sin c}{\sin a} = \sin C$$

5) $\sin c : \sin C = \sin b : \sin B$

$$\frac{\sin c \times \sin B}{\sin C} = \sin b$$

§. 38. **Anmerk.** Ich kann nicht umhin, bevor ich zu dem 4ten Fall schreite, von dem eben aufgelösten ein kleines Feld zur Anwendung zu eröffnen.

§. 39. **Aufgabe. Aus den geographischen Breiten und Längen zweyer Oerter auf der Erde ihre Entfernung zu finden.**

Auflösung. Man weis, daß die zween Meridianbögen, worauf die Breiten bestimmt werden, im Pol einen Winkel bilden, der die Differenz ihrer Längen zum Maase hat. Wenn man sich nun von einem Orte zum andern einen Bogen des größten Zirkels einbildet, so ist dieser die Entfernung; welche, wenn selbe in Graden gefunden worden, leicht in Meilen zu verwandeln. Es stelle Fig. 8 c den Pol vor, so ist A das Komplement der einen Breite, und B das Komplement der andern Breite. Die Differenz der Längen ist das Maas des Winkels c, und C der Abstand. Nun zur Sache selbst. Nach einer alten Angabe, soll z. B. die Breite von Dresden 51° 5′ und die

Länge

Länge 34° 7′; die Breite hingegen von München 48° 38′ und dessen Länge 31° 25′. Man bilde sich ferner ein, daß in b München, in a aber Dresden liege, so gielt A demnach 90 — 48° 38′ = 41° 22′ und B 90 — 51° 5′ = 38° 55′; c aber ist 34° 7 — 31° 25′ = 2° 42′, so wird

1) $r \times \cos c = \cot B \times \tan x$

$$\frac{r \cos c}{\cot B} = \tan x$$

Logarithmisch 19,9995176
10,0929227
9 9065949

Folglich x = 38° 53′
A = 41° 22
— x = 38° 53

Demnach A — x = 2, 29

2) $r . \sin x = \cot c . \tan P$

$$\frac{r . \sin x}{\cot c} = \tan P$$

Logarithmisch 19,9065949
11,3264372
8,5801577

Also P = 2°, 11

3) $r . \cos C = \cos P . \cos A - x$

$$\cos C = \frac{\cos P . \cos (A - x)}{r}$$

Logarithmisch 9,9996846
9,9995919
9,9992765

Folglich C = 3°, 18′. Wird dieser Bogen in Meilen ausgedrückt, so kommen beynahe 50 Meilen heraus.

aus. Weiter unten wollen wir aus dieser Verfahrungsart eine allgemeine Regel abziehen, und einige Beyspiele darnach auflösen.

Vierter Fall. Aus drey gegebnen Seiten die Winkel zu finden.

Auflösung. Dieser Fall verstattet 3 untergeordnete Fälle.

Erstens, wenn bey den dreyen Seiten ein Quadrant ist. Man verlängere eine andere Seite zum Quadranten, oder verkürze sie nach Erfoderniß, und lasse aus dem Gegenwinkel einen Perpendikel herabfällen so ist

$$r \cdot \cos h = \cos e \cdot \cos k$$

$$\frac{r \cdot \cos h}{\cos e} = \cos k$$

Und weil cos e nichts anders ist als sin C, und k nichts anders als das Maaß von A, so verwandelt sich obiger Ausdruck in folgenden um

$$\frac{r \cdot \cos h}{\sin C} = \cos A$$

Ist A einmal gefunden, so lassen sich die übrigen leicht nach dem ersten Falle finden, weil entgegenstehende Seiten und Winkel da sind. Z. B.

$$\sin h : \sin A = \sin B : \sin y$$
$$— \quad — \quad — = \sin C : \sin x$$

Wenn die Seite größer als ein Quadrant ist, so giebt es fast einerley Rechnung.

Zweytens, wenn zwo Seiten gleich sind, so wird ihr eingeschloßner Winkel und die dritte Gegenseite durch einen Perpendikel in zween gleiche

Theile getheilt, wodurch man zween rechtwinklichte Dreyecke erhält, und sich alles leicht finden läßt. Denn Fig. 10

$$r \,.\, \cos a = \cot h \,.\, \tang c$$
$$\cos a = \frac{\cot h \,.\, \tang c}{r}$$

oder auch $r \,.\, \sin c = \sin \frac{1}{2} b \,.\, \sin h$

$$\sin \frac{1}{2} b = \frac{r \,.\, \sin h}{\sin c}$$

Weil ferner $a = A$ ist, so hat man alle drey Winkel gefunden.

Drittens, wenn alle Seiten einander ungleich sind. Man verlängere zwo Seiten zu Quadranten, beschreibe aus dem zwischenliegenden Winkel in der Entfernung von 90° durch die Endpunkte nämlich der verlängerten Seiten einen Bogen so weit bis ihn die dritte verlängerte Seite schneidet, so wird Fig. 11 in unserm Dreyecke bdf folgende Proportion statt haben, wie wir am Ende auch erweisen wollen:

$$(\cos b - \cos d) : (\cos b + \cos d) = \tang \frac{f}{2} : \tang \frac{(h+f)+h}{2}$$

Wenn nun hier vom gefundenen letzten Gliede die halbe Differenz $\frac{f}{2}$ subtrahiert wird, so erhält man die kleine Größe das ist h. Nun ist in dem Dreyeck hkp

$$r \,.\, \cos m = \cot h \,.\, \tang p$$
$$\cos m = \frac{\cot h \,.\, \tang p}{r}$$

Die übrigen Winkel stehen dann bekanuten Seiten gegenüber, und sind leicht zu bekommen. Z. B.

I sin

I $\sin a : \sin f = \sin m : \sin b$

$$\sin a = \frac{\sin f \,.\, \sin m}{\sin b}$$

II $\sin c : \sin d = \sin m : \sin b$

$$\sin c = \frac{\sin d \,.\, \sin m}{\sin b}$$

Nun zum Beweis.

In dem Dreyeck $h\,k\,p$ ist

$r : \sin n = \sin h : \sin p$; im Dreyeck $n\,c\,R$ aber

$r : \sin n = \sin (h + f) : \sin q$

$\sin h : \sin p = \sin (h + f) : \sin q$ oder

$\sin h : \cos d = \sin (h + f) : \cos b$ oder verkehrt

$\sin h : \sin (h + f) = \cos d : \cos b$ nach der Proportionslehre:

$$(\sin (h + f) - \sin h) : (\sin (h + f) - \sin h)$$

$$= (\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$

Nehme man ferner an, welches wohl möglich ist, es sey Fig. 12, $x = h + f$

$y = h$.

Folglich verhalten sich B und A wie die Sinusse von x und y, oder (h + f) und h. Was demnach von A und B erwiesen ist, das ist auch eben darum von ihren Sinussen erwiesen.

Aber $B + A : B - A = \tan \frac{x + y}{2} : \tan \frac{x - y}{2}$

$\sin(h + f) + \sin h : \sin(h + f) - \sin h = \tan \frac{(h + f) + f}{2}$ $\tan \frac{f}{2}$ das ist:

(sin

$$(\sin h + \sin (h+f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= \left(\operatorname{tang} \frac{(h+f)+f}{2}\right) : \operatorname{tang} \frac{f}{2} \text{ aber}$$

$$(\sin h + \sin (h+f)) : ((\sin h + f) - \sin h)$$
$$= (\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$

$$(\cos b + \cos d) : (\cos b - \cos d)$$
$$= \operatorname{tang} \frac{(h+f)+h}{2} : \operatorname{tang} \frac{f}{2} \quad \text{oder umgekehrt}$$

$$(\cos b - \cos d) : (\cos b + \cos d)$$
$$= \operatorname{tang} \frac{f}{2} : \operatorname{tang} \frac{(h+f)+h}{2}$$

§. 40. Anmerk. Wenn wir mit Herrn Schulze die Figur nach Fig. 13 bezeichnen, so läßt sich Klemms Satz §. 823 allgemein auf folgende Weise ausdrücken, so wie ihn auch oben erwähnter Schulze aber ohne Beweis hingesetzt

$$\sin b \,.\, \sin c : \sin \tfrac{1}{2} (a + b - c) . \sin \tfrac{1}{2} (a + c - b)$$
$$= r^2 : (\sin \tfrac{1}{2} A)^2$$

und umgewandt für den letzten Fall

$$\sin C . \sin A : \cos \tfrac{1}{2} (B + C - A) . \cos \tfrac{1}{2} (B + A - C)$$
$$= r^2 : (\cos \tfrac{1}{2} b).$$

Fünfter Fall. Aus den drey Winkeln, die Seiten zu finden. Wir müssen allererst einen Lehrsatz vorausschicken.

§. 41. Lehrsatz. Wenn die Seiten eines Kugeldreyecks an beyden Endpunkten zu 90° ergänzt, und durch die Endpunkte der Ergänzungen Bögen größter Zirkel gelegt werden, die sich überall durchschneiden, und ein neues Kugeldreyeck bilden, so sind die Seiten dieses neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180 der Winkeln des vorigen Dreyeckes, wie

wie sie einander entgegen stehen; und umgekehrt, die Winkel des neuen Dreyecks, die Komplemente zu 180° der Seiten des vorigen.

Erster Satz. Fig. 14

$$d + gl = 180$$

Beweis.

$bl + gp = 180$ oder
$gl + gb + lp + lg = 180$ d. i.
$bp + lg = 180$

Zweyter Satz.

$$ad + l = 180$$

Beweis.

$ac + bd = 180$ oder
$ab + bc + cd + bc = 180$ oder
$ad + l = 180$

So läßt sich der Beweis von allen übrigen Seiten und Winkeln führen.

Auflösung des fünften Falles. Man schreibe statt der Winkel ihre Komplemente zu 180°, denke sie als Seiten in ein Dreyeck zusamm, und verfahre wie oben. Hat man nun einen Winkel gefunden, so ist dieß das Komplement der überstehenden Seiten zu 180°.

Eine abgezogene Verfahrungsart, aus den gegebnen geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter, ihre wahre Entfernung von einander zu finden.

a) Man schreibe sowohl den Log. Sinus, als rechts daneben den Log. Kosinus vom Längenunterschiede heraus.

b) Rechts wird das Kennziffer um 10 vermehrt, und der Log. Tang. von der größern Breite davon abgezogen. Der Logarithmenrest wird unter der Tangentenrubrik aufgeschlagen, der entsprechende Bogen herausgeschrieben, und die kleinere Breite dazu addiert.

* Ist die Längendifferenz über 90°, dann wird die kleinere Breite statt dem Addieren, subtrahiert.

** Heißt eine Breite südlich, die andere nördlich, so wird die nördliche abgezogen.

*** Beträgt die Längendifferenz genau 180°, so läßt sich die Entfernung ohne Trigonometrie finden. Es dörfen nämlich nur die zwo Breiten (wenn sie beyde nördlich oder südlich sind) von selben subtrahiert werden; ist aber eine Breite in diesem Falle nördlich, die andere südlich, so addiere man die kleinere Breite zu 180°, und ziehe die größere ab.

c) Vom obiggefundnen Logarithmenreste gerade über schreibe man auf der Kosinusseite den Log. Sinus heraus, addiere ihn zur Linken, und verringere das Kennziffer um 10.

d) Man suche diese Logarithmensumme unter den Log. Sinus auf, und schreibe den gegenüberstehenden Log. Kosinus heraus, addiere den Log. Sinus des obigen Bogenaggregats oder Differenz

dazu,

dazu, vermindere das Kennziffer um 10, so hat man den Log. Kosinus der verlangten Entfernung.

* Beträgt die Längendifferenz über 180°, so berechne man ihren Komplementsbogen.

Ein Beyspiel.

Nach Pescheck hat Lisabon 9°53′ Länge, und 38°40′ Breite. Hingegen Nankin 136°11′ Länge, und 30°15′ Breite; wie weit liegen diese beyde Städte voneinander?

Differenz 136°11′ — 9°53′ = 126° 18′; folglich sein Komplementsbogen 53°42′

Links		Rechts
9,9062964		19,7723314
9,9051787		9,9031966
19,8114751		9,8691348
	Tang	36° 30′
	kleinere Breite	30 15
		6° 15′ Diff.
9,9239191		
9,0368958		
18,9608149	welchem Log. ein Kosinus von 84°46′ entspricht, dessen Komplementsbogen 105° 14′ ist.	

Ein anders.

Nach Pescheck har Paris 22°23′ Länge u. 48°38′ B.
München 31°25′ — — 48°38′ —
Diff. 9° 2′

19,1959247	19,9945798
9,8789840	10,0582865
9,0749087	9,9362933

40° 49′
48 38
89° 27′

9,9969191
9,9999800
19,9968891, welchem der Log. Cos. von 6° 51′ entspricht. Weil nun auf einen Grad 15 Meilen gehen, so giebt die Regeldetri

G.	Meil.	G.	Min.	
1	15	6	51	
60	1	60		
4		411		102$\frac{3}{4}$ Meil.
		444		

Höhere Mathematik.

§. 1. Erklärung.

Unter dem Worte, höherer Mathematik, wird theils die Rechnung des Unendlichen, theils die Lehre von den krumen Linien verstanden. Im ersten Falle hat man die Differential- und Integralrechnung; im zweyten die höhere Geometrie, wo jene erst häufige Anwendung findet, und ihre sonstige Benennung: Analyse unendlicher Größen, ganz verdienet.

§. 2. Anmerk. Es giebt Mathematiker, welche beyde Theile unter den Namen höherer Geometrie befassen wollen; weil sowohl die Erfindung als auch die meiste Anwendung der Analyse auf diesem Zweige der Geometrie beruhet. Es hat indeß jede Parthey ihre Gründe, und die Sache verschlägt eben nichts, man mag diese oder jene Eintheilung annehmen.

§. 3. Anmerk. Für beyde Theile müssen einige Vorbegriffe vorausgeschickt werden, die also erst wohl gefaßt zu werden verlangen.

Von veränderlichen und beständigen Größen, und von den Funktioneu.

§. 4. Anmerk. Mit eben dem Nachdrucke, womit am Anfange der Buchstabenrechnung die Begriffe von entgegengesetzten, das ist, von negativen, und positiven Größen anempfohlen worden, empfiehlt man hier mehrmals am Anfange der höhern Mathematik noch neben denselben die Begriffe von veränderlichen und beständigen Größen um so nachdrücklicher, weil sie in diesen Theile der Mathematik durchgehends namhaften Einfluß behaupten.

§. 5. Erkl. Jede bestimmte Größe, die als solche betrachtet eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig ist, heißt veränderlich: hingegen die keines Wachsthumes noch eines Abnahmes fähig sind, ohne ihre Bestimmtheit zu verlieren, werden beständig genennt.

Der Radius ein und des nämlichen Zirkels z. B. man mag ihn ziehen wo man will, ist weder eines Wachsthums noch eines Abnahms fähig, sondern behält immer die nämliche Länge bey. Die Sehne aber kann bald größer, bald kleiner werden, ohne dadurch den Karakter einer Sehne im nämlichen Zirkel zu verlieren.

§. 6. Willk. Satz. Die beständigen Größen ist man gewohnt mit den ersten Buchstaben des Alphabets a, b, c. u. s. f.; die veränderlichen aber mit den letzten Buchstaben x, y, z, u. d. gl. auszudrücken.

§. 7. Erkl, Funktionen sind veränderliche Größen, die bey einer oder mehr obwaltenden bestän-

ständigen Größen so miteinander in Verwandtschaft stehen, daß der Wachsthum oder die Abnahme der einen unvermeidlichen Einfluß auf die Veränderung der andern habe.

Dieß zu erläutern, dienen die trigonometrischen Linien. Mit dem Sinus wachsen, beym nämlichen Radius, §§. 10. 11. Trig. die Tangente und Sekante: aber ihr Wachsthum veranlaßt auch zugleich unmittelbar den Abnahm aller Kolinien, als des Kosinus, Kotangente, u. s. f.

Auch die Arithmetik ist fruchtbar an Funktionen; Eine beständige Summe können was immer für zwo veränderliche Zahlen geben, wenn sie nur zusamm nicht mehr oder weniger betragen, als die festgesetzte Summe. Denn so z. B. ist $8 + 12 = 20$, oder $9 + 11 = 20$, oder $17 + 3 = 20$; überhaupt also $x + y = a$, wo immer die eine abnimmt wie die andere zugenommen, und umgekehrt. Man kann demnach x oder y weder klein genug, wie ohnehin klar ist, noch auch groß genug setzen, ohne daß nicht auch die andere Funktion einen Werth erhalt. Denn setzt man x in unsern Beyspiele $= 30$, so wird y einen negativen Werth bekommen, und $- 10$ heißen, uud so von andern Substitutionen zu reden. Bey beständigen Differenzen hingegen wächst eine Funktion mit der andern; und nimmt eine mit der andern ab. Z. B. $7 - 3 = 4$, oder $8 - 4 = 4$, oder $6 - 2 = 4$; überhaupt $x - y = d$. Auf eine ähnliche Art läßt sich auch vom beständigen Produkten und Quotussen sprechen.

 §. 8.

§. 8. **Einth. und Erkl.** Man theilt die Funktionen in algebraische und transcendentische ein. Algebraisch heißen sie, wenn selbe sich unter das Gesetz einer ausführbaren Gleichung bringen lassen, das heißt in eine Gleichung, woraus der Werth jeder Funktion allein bestimmt werden kann. Im widrigen Falle sind sie transcendentisch.

So ist der Sinus eine algebraische Funktion vom Kosinus des nämlichen Bogens; denn sie lassen sich in die Gleichung bringen, $\sin.\varphi = \sqrt{r^2 - \cos.\varphi}$ §§. 13. 18. oder nach unsern Ausdrücken $x = \sqrt{a^2 - y^2}$, wo sich y eben so gut allein, als x finden läßt. Der Sinus hingegen und sein zugehöriger Bogen sind transcendentische Funktionen; weil die Bögen nie in dem Verhältniß ab = oder zunehmen, wie ihre Sinusse. Die algebraischen Funktionen werden ferner eingetheilt in einförmige und mehrförmige. Jene bekommen mit jeder beliebigen Substitution nur einen einzigen Werth, diese erhalten mehrere Werthe, je nachdem eine oder auch beyde zu Würden erhoben sind. Z. B. In der Gleichung $y = \frac{bx}{a}$ sind einförmige Funktionen; In $y = \pm \sqrt{ax - x^2}$ zweyförmige, weil y allemal einen positiven und negativen Werth erhält, man mag für x setzen was man will.

Die übrigen Eintheilungen bleiben bey unsern Gebrauch derselben ohne sonderlichen Nutzen, und können in ausführlichern Schriften, wie in Klemm, u. a. wenn man will, nachgelesen werden.

Vor-

Vorbegriffe vom Unendlich- Großen und Kleinen.

§. 9. Erkl. Endlich heißt eine Größe, in so fern sie noch Gränzen hat. Gränzenlose Größen heißen daher aus dem Gegensatze, unendliche Größen.

Die Taugente von 90°, wie wir in der Trigonometrie gesehen, läßt unmöglich Gränzen gedenken, folglich wird sie mit allem Rechte unendlich groß genannt.

§. 10. Lehrsatz. Auch in der Arithmetik lassen sich unendliche Größen gedenken.

Beweis.

Man nehme eine endliche Größe so klein, als man will, an, so wird sie durch fortgesetztes Verdoppeln oder Tripplieren u. s. f. sich einmal über die Einheit erschwingen, und dieselbe bald sehr weit zurücklassen: wenn nun diese Zahl immerfort sehr geschwinde quadriertwird, das heißt, wenn man allemal das, was durch quadrieren herausgekommen, wieder mit sich selbst multipliciert, so wird man zuletzt auf eine Zahl kommen, die wegen ihrer Größe nicht mehr geschrieben werden kann, und folglich weil sie sich unter keine Gränzen mehr bringen läßt, unendlich groß genennt werden darf.

§. 11. Lehrsatz. Jede endliche Größe zu einer unendlich großen Größe addiert, verschwindet in Rücksicht derselben.

Satz.

$$\infty + x = \infty$$

Beweis.

$\frac{x}{0} = \infty$ Nach §. 25 Trig.

$\times 0$ $x = 0 \times \infty$

Prop. $1 : 0 = \infty : x$

$1 : (1+0) = \infty : (\infty + x)$

oder $(1+0) : 1 = (\infty + x) : \infty$

d. i. $1 : 1 = (\infty + x) : \infty$

Und $\infty + x = \infty$.

§. 12. Zusatz. Eben so wird erwiesen, daß eine endliche Größe von einer unendlich großen subtrahiert, gleichfalls verschwinde; denn

$1 : 0 = \infty : x$ §. 11.

oder $1 : (1-0) = \infty : (\infty - x)$

$1 : 1 = \infty : (\infty - x)$

$\infty - x = \infty$

§. 13. Zusatz. Es ist also allgemein wahr, daß $\infty \mp x = \infty$ sey.

§. 14 Anmerk. Diese und folgende Beweismethoden vom Unendlichen sind meist mit einigen Veränderungen aus Vegas mathematischen Vorlesungen wegen ihrer Faßlichkeit entlehnt worden. Denn Kästners und Eulers Beweisarten scheinen bis daher noch für unsern Himmelsstrich einmal zu abstrakt.

§. 15. Erkl. Wenn unendliche Größen zum Quadrat erhoben sind, so heißen sie unendlich große und kleine Größen des zweyten Ranges oder der zweyten Ordnung; zum Kubus erhoben, der dritten Ordnung u. s. f. Z. B. ∞, ∞^2, ∞^3, ∞^4 und so weiter. Ferner $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ u. s. f.

§. 16. **Lehrsatz.** Eine unendliche Größe des ersten Ranges verschwindet in der Addition oder Subtraktion in Rücksicht einer unendlichen Größe des zweyten Ranges.

Satz.

$$\infty^2 \pm \infty = \infty^2$$

Beweis.

$$1 : \infty = \infty : \infty^2$$

Verkehrt $\infty : 1 = \infty^2 \; \infty$

$$\infty : \infty \pm 1 = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$$

Aber Gemäß dem vorigen ist

$$\infty = \infty \mp 1$$

Also substit. $\infty : \infty = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

$\infty : \quad 1 : \; 1 : \; = \infty^2 : \infty^2 \pm \infty$

Sohin $\infty^2 \pm \infty = \infty^2$

§. 17. **Zusatz.** Eben so richtig ist es allgemein, daß jede unendlich große Größe eines niederen Ranges in Rücksicht einer andern vom höhern Range verschwindet. Denn es ist auch

$1 : \infty = \infty^2 : \infty^3$ Es ist

Versetzt. $\infty : 1 = \infty^3 : \infty^2$ aber auch

$\infty : \infty \pm 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$

und weil wieder $\infty = \infty \mp 1$

$\infty : \infty = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$

$\infty : \quad 1 : \; 1 = \infty^3 : \infty^3 \pm \infty^2$

$\infty^3 = \infty^3 \mp \infty^2$ u. s. f.

§. 18. **Lehrsatz.** Eine unendlich kleine zu einer endlichen addiert, oder von ihr subtrahiert, verschwindet mehrmals.

Satz.

Satz.

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

Beweis.

$$\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$$

Verkehrt $1 : \frac{1}{\infty} = \infty : 1$

Und $1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty \pm 1$

aber $\infty = \infty \pm 1$

Substit. $1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \infty : \infty$

$\infty :$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = 1 : : 1$$

$$1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$$

§. 19. **Lehrsatz.** Eine unendlich kleine Größe der zweyten Ordnung verschwindet in Rücksicht einer solchen Ordnung.

Satz.

$$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$$

Beweis.

$$1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$$

$$1 : 1 \pm \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Aber

Aber $1 = 1 \pm \frac{1}{\infty}$ folglich subst.

$$1 : 1 = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$$

Und $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$

§. 20. Zusatz. Ueberhaupt verschwinden unendlich kleine Größen der höhern Ordnung in Rücksicht solcher der niedern Ordnung, denn es ist wieder

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^4}$$

$$\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$$

Aber $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2}$

Subst. $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^3} \mp \frac{1}{\infty_4}$

$:\infty \quad 1 : 1 = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty 3} \mp \frac{1}{\infty^4}$

Und $\frac{1}{\infty^3} = \frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$

§. 21. Anmerk. Unendlich kleine Größen giebt es zwar in der physischen Welt nicht; aber sie kommen dem Mathematiker doch gut zu statten, wenn er sich bey Zergliederung endlicher Größen ihre Entstehung nicht als ein plötzliches Daseyn; sondern als eine allmählig sanfte Entwickelung der möglich kleinsten Wachsthümer vorstellt. Auf gleiche Art läßt er auch Größen nicht auf einmal, sondern nach und nach in den kleinsten Abnähmen sich verlieren.

Z. B. Der Sinus vom Nullgrade wird nicht mit einem Male zum Sinustotus, sondern er wächst, so zu sagen, Punkt für Punkt durch alle Sekunden, Terzen, Quarten u. d. gl. des Quadrantens. Und so muß auch von der Abnahme desselben im zweyten Quadranten gesprochen werden.

Je kleiner man also solche Wachsthümer und Abnähme annimmt, desto richtiger muß auch am Ende das Resultat von der Beschaffenheit der Zusammensetzung, oder Vernich-

tung

tung solcher Größen seyn. Man ist demnach am besten daran, wenn sie so klein genommen werden, daß sich nichts kleiners darüber denken oder angeben läßt, und dieß heißt in der Sprache der Mathematiker unendlich kleine Größen, oder Differentiale endlicher Größen.

Differentialrechnung.

§. 22. Erkl. Die Anweisung, die unendlich kleinsten Wachsthümer oder Abnähme, das heißt die Differentiale veränderlicher Größen in jedem Zustande oder Verhältniß derselben richtig zu bestimmen, wird Differentialrechnung genennt.

§. 23. Zusatz. Beständige Größen haben ihrem Begriff gemäß keine Differentiale.

§. 24. Willk. Satz. Das Zeichen eines Differentials ist nicht mehr $\frac{1}{\infty}$, sondern ein d, welches vor der abnehmenden, oder zunehmenden Größe hingeschrieben wird. Z. B. dx, dy, dz, wo d kein Faktor ist, sondern mit seinem dabeystehenden Buchstaben, den unendlich kleinen Wachsthum oder Abnahm der Größe bedeutet, ungefähr wie $\frac{x}{\infty}$, $\frac{y}{\infty}$, $\frac{z}{\infty}$ u. s. f.

§. 25. Zusatz. Wenn also die Größe vor seinen Wachsthum x heißt, so ist sie nachher $x + dx$, oder nach der Abnahme $x - dx$. Ueberhaupt $x \pm dx$. Weil sie nachher um $\frac{x}{\infty}$ größer oder kleiner geworden.

§. 26. Zusatz. Das Differential von a oder b, in so ferne sie beständige Größen bedeuten, ist also $= 0$ das heißt $da = 0$ $db = 0$ u. s. f.

Anmerk.

§. 27. Anmerk. In der Geometrie lassen sich die Differentiale von Linien so ziemlich versinnlichen. Man ziehe Fig. 1 nur das Dreyeck a k p, und bilde sich ein die Linie a b wachse so lange mit der Funktion b c fort, bis beyde eine bestimmte Gränze z. B. k p erreichen, so kann a b durch x und b c durch y ausgedrückt werden. Wenn nun dieses a b um ein unendlich kleines Stück b f, welches b f wegen ihrer unendlichen Kürze freylich nicht gezeichnet werden kann, gewachsen ist, so wird auch b c um das unendlich kleine Stück k g zugenommen haben. Die Linien heissen nun nach dem Wachsthum $x + dx$ und $y + dy$. Wenn endlich ihre vorigen Größen $x\,y$ davon abgezogen werden, so bleiben ihre Differenzialen übrig; also $x + dx - x = dx$ und $y + dy - y = dy$.

§. 28. Zusatz. Es läßt demnach nicht schwer, einzelne Größen zu differenzieren; man hat nichts weiter zu thun, als daß man ihnen das gewöhnliche d vorsetzt. So ist z. B. $d(x - y + z + a) = dx - dy + dz$. Anders verhält sich aber die Sache mit Würden, Produkten und Quotienten.

§. 29. Lehrsatz. Das Differential einer Würde ist ein Produkt von drey Faktorn, welche der Exponent, die Würde selbst mit seinen um eines verringerten Exponenten, und das Differential der Urgröße, oder simpeln Größe sind.

Satz.

$$d\,(x^m) = m\,x^{m-1}\,dx$$

Beweis.

Man erhebe x sammt seinem Differential dx, vermöge des binomischen Lehrsatzes, zur mten Würde: erhebe auch x ohne Differential zur nämlichen Würde, so wird der Unterschied dieser Würden eben darum das Differenzial der Würde selbst geben.

$d\,(x^m)$

$$d(x^m) = (x + dx)^m - x^m = x^m + m x^{m-1} dx + \frac{m(m-1)}{1 \times 2} x^{m-2} dx^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \times 2 \times 3} x^{m-3} dx^3 \ldots - x^m$$

$d(x^m) = m x^{m-1} dx$; denn die übrigen Glieder verschwinden alle, als unendlich kleine Größen der höhern Ordnung, in Rücksicht solcher der niedern Ordnung.

§. 30. **Zusatz.** Um also eine Würde zu differenzieren, darf nur der Exponent zum Koefficienten gemacht, er selbst um eines vermindert, und diesen beyden Faktorn das Differential der simpeln Größe als dritter Faktor angehängt werden, z. B. $d(x^5) = 5 x^4 dx$.

§. 31. **Zusatz.** Weil sich alle Wurzelgrößen auf Würden gebrochner Exponenten reduzieren lassen, so sind wir auch itzt schon im Stande, alle einfache Wurzelgrößen, mit zu Hilfe gerufner Würdenlehre, zu differenzieren. Z. B. $d(\sqrt[3]{x^2}) = d(x^{\frac{2}{3}})$
$= \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} dx = \frac{2 x^{-\frac{1}{3}} dx}{3} = \frac{2 dx}{3 x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2 dx}{3 \sqrt[3]{x}}$

§. 32. **Zusatz.** Auch sogar Brüche, die zum Zähler die Einheit, und zum Nenner eine veränderliche Größe haben, lassen sich nach dem Bisherigen differenzieren, z. B. $d\left(\frac{1}{x}\right) = d(x^{-1}) = -1\, x^{-2} dx = -x^{-2} dx = \frac{-dx}{x^2}$

§. 33. **Lehrsatz.** Das Differential eines Produkts von zwoen veränderlichen Größen ist gleich dem ersten Faktor in das Differential des zweyten multipliciert, mehr dem zweyten Faktor in das Differential des ersten multipliciert.

Satz

$$d(xz) = xdz + zdx$$

Beweis.

Man multipliciere zuerst die Faktorn mit ihren Differentialen unter sich, dann auch ohne Differential, so wird der Unterschied der Produkte das verlangte Differential geben.

$$d(xz) = (x+dx)(z+dz) - xz$$
$$= xz + xdz + zdx + dxdz - xz$$
$$= xdz + zdx + dxdz, \text{ also}$$

$d(xz) = xdz + zdx$; weil das letzte Glied aus obigen Grunde wieder verschwindet.

§. 34. Anmerk. La Caille, der alle Beweise für die Differentialrechnung aus der Geometrie herholet, wodurch freylich die Sache das Ansehen gewinnt, als hange dieser Zweig der Mathematik ganz von der Geometrie ab, hat obigen Satz beyläufig so bewiesen. Ein Produkt von zweenen Faktorn stellt den Inhalt eines Parallelograms vor, dessen Faktorn Höhe und Grundlinie sind. Wachsen nun Höhe und Grundlinie, so bekömmt das Parallelogram ein Differential, welches aus drey unendlich kleinen Parallelogramen bestehet. Es ist nämlich Fig. 2

$$d(\square apbf) = bcfg + pqkf + fghk$$

da nun $bc = fg = dz$

$cg = bf = ap = x$

so ist $bcfg = xdz$; auf gleiche Art auch

$pqkf = zdx$ und

$fghk = dxdz$. Nun substit.

$d(xz) = xdz + zdx + dxdz$ und weil das letzte Glied aus mehrmal angeführtem Grunde wegfällt; so ist noch $d(xz) = xdz + zdx$. Ein sehr sinnlicher, und eben so strenger Beweis.

§. 35. Zusatz. Ist bey dem Produkt einer von den zween Faktoren beständig, so wird bloß der beständige Faktor mit dem Differentiale des veränderlichen multipliciert. Der Beweis davon fließt zwar schon aus obigen Satze; Denn $d(ax) = adx + xda = adx + x \times o = adx$: allein er läßt sich weit richtiger aus obigen Gründen führen. Es ist nämlich wieder $d(ax) = (a + da) \times (x + dx) - ax = a \times (x + dx) - ax = ax + adx - ax = adx$.

§. 36. Lehrsatz. Das Differential eines Produkts von dreyen, oder mehr veränderlichen Größen erhält man, wenn vom Produkt immer ein Faktor weggelassen, und statt dessen sein Differential gesetzt wird, und dieß so oft, bis die Reihe alle Faktoren durch und durch getroffen.

Satz.

$$d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx.$$

Beweis.

Es sey $xy = v$, so ist $x = dv$

$z \times$ $zyz = vz$

Daher $d(xyz) = vdz + zdv$

Substit. für v und dv

Also $d(xyz) = xydz + z(xdy + ydx)$

$d(xyz) = xydz + zxdy + zydx$

§. 37. Zusatz. Eben so leicht ist es auch zu beweisen, daß $d(xvyz) = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv$; und so auch von fünf, sechs, und noch mehr Faktorn zu reden.

§. 38.

§. 38. Zusatz. Finden sich auch beständige Größen als Faktorn ein, so geht die Regel wie oben fort, nur daß selbe kein Differential haben, folglich jene Glieder, in welche sie multipliciert werden sollten, wegfallen, als Produkte nämlich, welche Null zum Faktor haben, z. B. $d(amxyz) = amxydz + amxzdy + amyzdx$. Denn $axyzdm = axyz \times o = o$ u. s. f.

§. 39. Zusatz. Nun ist man bereits im Stande auch zusammengesetzte Würdengrößen zu differenzieren. Z. B. $d(x^2 y^3) = x^2 d(y^3) + y^3 d(x^2) = x^2 \times 3y^2 dy + y^3 \times 2xdx = 3x^2 y^2 dy + 2y^3 xdx$

§. 40. Lehrsatz. Das Differential eines Quotienten oder Bruches, ist gleich dem Nenner multipliciert mit dem Differential des Zählers, weniger dem Zähler multipliciert mit dem Differential des Nenners, dieß alles durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Satz.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

Beweis.

Man dividiere die beyden Größen mit ihren Differentialen, und ohne denselben; der Unterschied wird wieder das Differential des Quotienten selbst seyn. Es ist demnach.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$$

Unter gleiche Nenner gebracht. $= \frac{xy + ydx - xy - xdy}{y^2 + ydy}$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2};$$ denn ydy verschwindet im Nenner als eine unendlich kleine Größe in Rücksicht der endlichen y^2

§. 40. **Anmerk.** Dieß läßt sich sehr anschauend aus der Geometrie beweisen. Man beschreibe Fig. 3. zween Zirkel in einander, die sich unendlich nahe liegen, und in einem Punkte berühren. Aus diesen Punkt werde eine Sehne sammt ihrem Differentiale gezogen, so sind, wenn man selbe durch eine andere Sehne die ebenfalls wieder zwo Differentiale haben wird, durchschneidet, die Produkte der Segmente in beyden Fällen gleich. Es ist nämlich

I. $zy = 1 . x = x$ und

y: $z = \frac{x}{y}$

II. $1 \times (x + dx) = (y + dy) \times (z + dz)$

$$x + dx = yz + zdy + ydz + dydz$$

Subst. $x + dx = \frac{yx}{y} + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

Abgek. $x + dx = x + \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right) + dydz$

$$dx = \frac{xdy}{y} + yd\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$dx - \frac{xdy}{y} = yd\left(\frac{x}{y}\right)$$

: y

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

Und zu gleichen Nennern gebracht.

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

§. 37.

§. 41. Zusatz. Sind der Nenner oder der Zehler beständig, oder mit beständigen Größen vermischt, so läßt sich die allgemein bewiesene Regel ebenfalls anwenden. Zum Beyspiel:

1) $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{x\,da - a\,dx}{x^2} = -\frac{a\,dx}{x^2}$

Denn $\frac{a + da}{x + dx} - \frac{a}{x} = \frac{a}{x + dx} - \frac{a}{x}$

$= \frac{ax - ax - a\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{-a\,dx}{x^2}$

2) So ist auch $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{a\,dx}{a^2} = \frac{dx}{a}$

§. 42. Zusatz. Obwohl sich alle mögliche Größen nach den bisherigen Regeln differentieren lassen, so kann es doch Fälle geben, wo man durch Hilfe anderer Kunstgriffe leichter abkömmt. Man nennt dieß die Transformation, und kömmt sehr gut bey zusammgesetzten Größen zu statten. Es wird nämlich die ganze komplexe Größe einem Buchstaben gleichgesetzt, und so lange fortkalkuliert, bis der Ausdruck zum Differentieren geschickt ist. Nach der Differentiation kann dann wieder der eigentliche Werth substituiert werden. Wir wollen die beyden Arten im nächsten besten Beyspiele vergleichen, und sehen, welche kürzer, und leichter ist. Es soll $\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}$ differentiert werden. Erst auf gemeine Art:

$d(\sqrt[3]{ax - y^2 + xz}) = d(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{\frac{1}{3}-1}\, d(ax - y^2 + xz)$

$= \frac{1}{3}(ax - y^2 + xz)^{-\frac{2}{3}}(a\,dx - 2y\,dy + x\,dz$

$+ z\,dx) = \frac{1}{3} \times (\overline{ax - y^2 + xz})^{\frac{1}{3}} \times (a\,dx -$

$$- 2ydy + xdz) = \frac{adx - 2ydy + xdz}{3(ax - y^2 + xz)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{adx - 2ydy + xdz}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$$

Durch Transformation.

$$\sqrt[3]{ax - y^2 + xz} = p$$

$$ax - y^2 + xz = p^3$$

diff. $adx - 2ydy + xdz + zdx = 3p^2 dp$

$$\frac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3p^2} = dp$$

subst. $\dfrac{adx - 2ydy + xdz + zdx}{3\sqrt[3]{(ax - y^2 + xz)^2}}$

§. 43. **Erkl.** Es kann auch Fälle geben, wo die Differentialen selbst noch eines Wachsthumes, oder Abnahmes fähig sind, daher werden zuweilen die Differentiale noch einmal differentiert, und dann heißen sie Differentiodifferentiale.

§. 44. **Zusatz.** Differentiale nochmal zu differentieren, kann keine Schwierigkeit haben. Man darf nur, um aller Verwirrung auszuweichen, statt den simpeln Differentialen einen Buchstaben setzen, und nach der Differentiation wieder substituieren.

§. 45. **Aufgabe.** Es soll $\frac{xdy - ydx}{x^2}$ nochmal differentiert werden.

Auflösung. Es sey $dy = v$ und $dx = z$ so ist $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{xv - yz}{x^2}$

Nun

Nun ist ferner $d\left(\frac{xv - yz}{x^2}\right) = \frac{x^2(xv - yz) - (xv - yz)\, d(x^2)}{x^4}$

$$\frac{x^2(xdv + vdx - ydz - zdy) - (xv - yz) \times 2xdx}{x^4}$$

$$\frac{x^3dv + x^2vdx - x^2ydz - x^2zdy - 2x^2vdx + 2xyzdx}{x^4}$$

Substit. $\frac{x^3ddy + x^2dxdy - x^2yddx - x^2dxdy - 2x^2dxdy + 2xyddx}{x^4}$

Oder auch abgekürzt.

$$\frac{x^3d^2y - 2x^2dxdy - x^2yd^2x - 2xyd^2x}{x^4}$$

§. 46. **Anmerk.** Von diesen Beyspiele läßt sich gar leicht auf andere schließen, wenn man gähling dergleichen Differentiodifferentiale nöthig haben soll.

Etwas vom größten, und kleinsten Werthe der Funktionen, als eine vorläufige Anwendung der Differentialrechnung.

§. 47. **Erkl.** Es kann Größen geben, die nicht immer fort wachsen, oder abnehmen, sondern irgendwo ihre Differentiale einen Augenblick aufhören, und in die entgegengesetzte umändern lassen. So z. B. steigt ein in die Höhe geworfner Stein, oder eine Bombe anfangs immer höher und höher, endlich kehren diese Körper um, und fallen wieder immer tiefer und tiefer. So schwillt bey der Fluth des Meeres das Wasser immer mehr an, bis es eine gewisse Höhe erreichet, von der es wieder sinket, und zwar ebenfalls bis auf ein gewisses Ziel, wo es mehrmals zu steigen anfängt. Diese Zustände solcher Größen nun heißen größte und kleinste Werthe der Funktionen.

§. 48. **Zusatz.** Weil in solchen Zuständen die Differentiale der Funktionen wegen ihrer Vernichtung kein Verhältniß zu einander haben, das heißt, weil ihr Verhältniß zu einander Null ist, so können die Werthe des Kleinsten, oder Größten unter dieser Hypothese leicht bestimmt werden; denn man darf nur die Verhältniße der Differentiale = o setzen, und dann sehen, was sich für die eine, oder die andere Funktion ergiebt.

§. 49. **Zusatz.** Ob der herausgekommne Werth ein Größter oder Kleinster sey, kann nicht anders, als aus den Umständen der Aufgabe abgenommen werden.

§. 50. **Aufgabe.** Auf welchen Punkt des Diameters im Zirkel läßt sich der größte Perpendikel aus der Peripherie herabfällen?

Auf-

Auflösung. Man suche eine Gleichung für diesen Perpendikel, differenziere sie, und lasse das Verhältniß der Differentiale der beyden Funktionen Null werden, so werden die Umstände, unter welchen die Forderung möglich ist, aus der Gleichung bald sichtbar seyn. Es heiße Fig. 4. der Perpendikl $ab = y$ das eine Segment $db - x$ so ist das andere ba, wenn a den Diameter ab bezeichnet $= a - x$

Folglich $y^2 = x(a - x)$

$$y^2 = ax - x^2$$

$$y = \sqrt{ax - x^2}$$

$$y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Diff. $dy = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{\frac{1}{2}-1} d(ax - x^2)$

$$dy = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(adx - 2xdx)$$

$$dy = \frac{adx - 2xdx}{2(ax - x2)^{\frac{1}{2}}}$$

$:dx$ $\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$

aber $\frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = \frac{a - 2x}{2(ax - x2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\times 2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}} \quad 0 = a - 2x$$

$$2x = a$$

$$x = \frac{1}{2}a$$

Dieß geschieht also in jenem Punkte des Diametes, wo ein Segment, folglich auch das andere dem halben Diameter gleich ist, das ist im Mittelpunkte.

§. 51.

§. 51. Aufgabe. Ein Haus soll bis an den Dachstuhl 45000 Kubikfuß in sich fassen. Der Grund dazu ist aber nicht länger, als 50 Schuh. Fragt sich, wie sollen sich Länge und Breite zu einander verhalten, daß die Außenfläche des Hauses die Kleinstmöglichste werde; das heißt, daß man die wenigsten Baumaterialien brauche, folglich auch die kürzeste Zeit zum Bauen verwendet werde?

Auflösung. Es sey $45000 = q$
Die Länge $50 = b$
Breite $= x$
so ist die Höhe $= \frac{q}{bx}$

Nun ist die Grundfläche dieses Parallelepipedums $= bx$, die senkrechte Seitenfläche auf der Länge $b \times \frac{q}{bx} = \frac{bq}{bx} = \frac{q}{x}$ und die senkrechte Seitenfläche der Breite.

$$= x \times \frac{q}{bx} = \frac{xq}{bx} = \frac{q}{b}$$

Folglich die halbe Oberfläche $y = bx + \frac{q}{x} + \frac{q}{b}$

$$y = \frac{bx^2 + q}{x} + \frac{q}{b} \quad \text{diff.}$$

$$dy = \frac{x\,d(bx^2 + q) - (bx^2 + q)\,dx}{x^2}$$

$$dy = \frac{x \times (2bx\,dx) - bx^2\,dx - q\,dx}{x^2} = \frac{2bx^2\,dx - bx^2\,dx - q\,dx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2bx^2 - bx^2 - q$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2bx^2 - bx^2 - q = 0$$

$$2bx^2 - bx^2 = q$$

$$x^2 = \frac{q}{2b - b} = \frac{q}{b} \quad \text{und} \quad x = \sqrt{\frac{q}{b}}$$

Die Breite wird also erhalten, wenn der kubische Inhalt durch die Länge dividiert, und aus dem Quotus die Wurzel ausgezogen wird. Nun muß noch die Höhe bestimmt werden.

Es ist $a = \frac{q}{bx}$

$abx = q$

Substit. $ab\sqrt{\frac{q}{b}} = q$

Quad. $\frac{a^2\ b^2\ q}{b} = q^2$

$a^2\ bq = q^2$

$a^2\ b = q$

$a^2 = \frac{q}{b}$

$a = \sqrt{\frac{q}{b}}$

Also muß man Höhe und Breite gleich machen, wenn die Foderung gelten soll. Es ist demnach in unserer Aufgabe $x = \sqrt{\frac{45000}{50}} = = \sqrt{900} = 30$. Man zerfälle um 900 in was immer für zween Faktoren, so wird die Oberfläche allemal größer seyn.

Aufgaben aus arithmetischen Funktionen.

Die Juden hielten bey einem Fürsten um Duldung in seinen Landen an, und versprachen ihm, nebst einer jährlichen Abgabe von baaren 1000 fl. auch eine Kopfsteuer, vermög welcher jeder Jude alle Jahre so viele Dukaten zahlen wollte, als Köpfe geduldet werden. Die Antwort des Fürsten war: Euer Anerbiethen ist großmüthig; Ihr sollt Dul-

dung

dung haben: und damit auch ich fürstlich handle, so verspreche ich entgegen jedem Juden, der sich in meinem Lande ansäßig macht, eine jährliche Anweisung von 100 fl. Es fragt sich nun: Wie viele Juden dörfen sich häuslich niederlassen, daß gemäß der beederseitigen Bedingung ihre Abgabe die kleinste sey?

Auflösung. Die Anzahl aller naturalisierenden Juden seyen x. Wenn der Dukaten zu 5 fl. gerechnet wird, so ist der Tribut eines Kopfes jährlich $5x - 100$; folglich aller Köpfe $(5x - 100) \times x = 5x^2 - 100x$; und mit der fixen Abgabe $5x^2 - 100x + 1000 = y$

$$\text{diff.}\quad 10xdx - 100dx = dy$$

$$10x - 100 = \frac{dy}{dx} = 0$$

$$10x = 100$$

$$x = \frac{100}{10} = 10$$

Also ist die jährliche Zahlung von 10 Juden die Kleinste.

Probe. Jeder Jude müßte 10 Dukaten, das ist 50 fl. zahlen; also alle, $50 \times 10 = 500$ fl.; dieß macht mit den fixen 1000 fl. 1500 fl. Weil nun jeder Jude 100 fl. bekömmt, so bekommen alle 1000 fl.; diese abgezogen, läßt 500 fl. Setzen wir 8 Juden, so giebt einer 8 Dukaten, oder 40 fl. mithin alle $40 \times 8 = 320$ und die 1000 dazu, beträgt 1320; die 800 fl. welche sie miteinander herausbekommen, abgezogen, giebt 520; folglich um 20 fl. mehrer als vorher. Das nämliche kömmt auch heraus, wenn man 12 Juden annimmt. Kurz, man än-

ändere die Anzahl der Juden wie man will, so wird allemal mehr als 500 fl. zum Vorschein kommen.

Noch eine solche Aufgabe.

Ein Getraidhändler führt von München 6 Schäffel Korn weg. Setzen wir, mit jeder Meile, tiefer ins Ausland, werde auch das Münchner Schäffel um 12 kr. theurer; es steige aber auch der Lebensunterhalt, so daß er den ersten Tag $\frac{1}{2}$ fl. den zweyten 1 fl. den dritten $1\frac{1}{2}$ fl. u. s. w. verzehrte. Nun fragt es sich, wenn er täglich 6 Meilen macht, wie weit er fahren dörfe, um den größten Gewinn nach Hause zu bringen?

Auflösung. Die Meilen, wie weit er fahren darf, sollen x heißen. Man findet demnach durch die Regel Quinque den Gewinn auf folgende Weise

Meil	Schäffl	kr.	Schäffl	Meil.
1	1	12	6	x

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ \hline 72 \\ x \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{72x}{60} = \frac{6x}{5} \text{ fl.}$$

Nun muß natürlich auch der Unkosten abgezogen werden, der aus dem Unterhalte der Pferde und des Fuhrmanns entspringt. Weil dieß eine Progreßion giebt, deren Differenz $= \frac{1}{2}$ das erste Glied ebenfalls $\frac{1}{2}$ ist, und die Anzahl der Glieder durch die Regel Detri bestimmt werden kann, nämlich

Meil

M.	Tag	M.
6	1	x

$$n = \frac{x}{6} \text{ Tag.}$$

So ist nach der Formel $\int = an + \left(\frac{dn^2 - dn}{2}\right)$

$$\int = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{x}{6} + \left(\frac{\tfrac{1}{2} \times \tfrac{x^2}{36} - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{x}{6}}{2}\right) = \frac{x}{12} + \frac{\tfrac{x^2}{72} - \tfrac{x}{12}}{2}$$

$$= \frac{x}{12} + \frac{\tfrac{x^2 - 6x}{72}}{2} = \frac{x}{12} + \frac{x_2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{x}{12} + \left(\frac{\tfrac{x^2}{72} - \tfrac{x}{12}}{2}\right)$$

$$\int = \frac{x}{12} + \left(\frac{\tfrac{x^2}{72} - \tfrac{6x}{72}}{2}\right)$$

$$\int = \frac{x}{12} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{12x}{144} + \frac{x^2 - 6x}{144}$$

$$\int = \frac{6x + x^2}{144} \text{ fl.}$$

Weil aber die Rückreise eben das kostet, als eine abnehmende Progreßion, so muß dieß doppelt genommen werden. Also der Unkosten $\frac{6x + x^2}{72}$ fl. Daher ist der ganze Gewinn, den er nach Hause bringt, und den wie y nennen wollen.

$$\frac{6x}{5} - \frac{6x - x^2}{72} = y.$$

$$\frac{432x - 30x - 5x^2}{360} = y.$$

402x

$$
\begin{aligned}
402x - 5x^2 &= 360y \quad \text{diff.} \\
402dx - 10x\,dx &= 360dy \\
402 - 10x &= \frac{360dy}{dx} = 0 \\
402 &= 10x \\
40\tfrac{1}{5} &= x
\end{aligned}
$$

Diese Meilen zu Täge gemacht, das ist durch 6 dividiert giebt $\frac{40\frac{1}{5}}{6} = \frac{201}{30} = 6\frac{21}{30} = 6\frac{7}{10}$ Tag.

§. 52. **Anmerk.** Solche Anwendungen vom Kleinsten und Größten giebt es in der Physik, überhaupt in der angewandten Mathematik der Menge nach. Uns genügt hier den Anfängern in diesem Stücke die Bahn gebrochen zu haben, wenn sie je Muth besitzen, sich weiter in diesem noch sehr unbearbeiteten Felde, wo noch manche Erfindungen für das gemeine Leben zu machen wären, umzusehen.

Integralrechnung.

§. 53. **Erkl.** Integrieren heißt, aus einem Differentiale die Größe finden, der dasselbe zugehört.

§. 54. **Zusatz.** Es muß also gerade die umgekehrte Verfahrungsart des Differentierens beobachtet werden, wenn man ein Differential integrieren will.

§. 55. **Willk. Satz.** Das Zeichen, daß eine Größe integriert werden soll, ist ein vorgesetztes S. Vielleicht soll es, obwohl uneigentlich, die Summe aller Differentialen bedeuten. Z. B. $S(2ax\,dx) = ax^2$

§. 56. **Zusatz.** Wenn man allgemein jede Größe als eine Gattung von Würden ansieht, so heißt überhaupt das Gesetz zu integrieren, so: Man erhöhe den Exponenten jener Größe, wovon das simple Differential sichtbar ist, um eins, und dividiere alles durch das Produkt aus den

er-

erhöhten Exponenten in das Differential der Radikalgröße.

§. 57. Aufgabe. Es sollen folgende Differentiale integriert werden. 1) $mx^{m-1}dx$ 2) $4x^3dx$ 3) $\frac{y^2dy}{3}$

Auflösung. 1) $S(mx^{m-1}dx) = \frac{mx^{m-1+1}dx}{(m-1+1)dx} = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$

2) $S(4x^3dx) = \frac{4x^4dx}{4dx} = x^4$

3) $S\left(\frac{y^2dy}{3}\right) = \frac{y^3dy}{3\times 3dy} = \frac{y^3}{3\times 3} = \frac{1}{9}y^3$

§. 58. Zusatz. Wenn manchmal die Größe selbst, wovon das simple Differential da ist, nicht zum Vorschein kömmt, so kann sie durch einen Kunstgrif ersetzt werden, welches geschieht, wenn eben diese mangelnde Größe zum Null erhoben als Faktor eingeschoben wird; indem dieß, als der Werth von eins, in einem Produkte nichts ändert.

§. 59. Aufgabe. Es sollen integriert werden, 1) adx 2) $dx - dy$ 3) $\frac{dv}{2} + dz - bdx$

Auflösung. 1) $S(adx) = Sax^0dx = \frac{ax^1dx}{1dx} = ax$

2) $S(dx - dy) = S(x^0dx - y^0dy) = \frac{x^1dx}{1dx} - \frac{y^1dy}{1dy} = x - y$

3) $S\left(\frac{dv}{2} + dz - bdx\right) = S\left(\frac{v^0dv}{2} + z^0dz - bx^0dx\right) = \frac{vdv}{2dv} + \frac{zdz}{dz} - \frac{bxdx}{dx} = \frac{1}{2}v + z - bx.$

Zu-

§. 60. Zusatz. Differentiale der Produkte und Quotienten veränderlicher Größen sind leicht zu kennen, weil diese wechselweise mit ihreu simpeln Differentialen multipliciert sind. Sie dörfen daher nicht als abgesonderte, sondern als zusammenhangende, komplexe Größen behandelt werden.

§. 61. Aufgabe. Es seyen zu integrieren,
1) $xdy + ydx$ 2) $\frac{ydz - zdy}{y^2}$ 3) $xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx$

Auflösung. 1) $S(xdy + ydx) = S(xy^0dy + yx^0dx) = \frac{xydy + yxdx}{dy + dx} = \frac{xy(dy + dx)}{dy + dx} = xy$

2) $S\left(\frac{ydz - zdy}{y^2}\right) = S\left(\frac{yz^0dz - zy^0dy}{y^2}\right)$
$= \frac{yzdz - zydy}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz(dz - dy)}{y^2(dz - dy)} = \frac{yz}{y^2} = \frac{z}{y}$

3) $S(xvzdy + xvydz + xzydv + vzydx)$
$= S(xvzy^0dy + xvyz^0dz + xzyv^0dv + vzyx^0dx)$
$$= \frac{xvzydy + xvyzdz + xzyvdv + vzyxdx}{dy + dz + dv + dx}$$
$$= \frac{xvzy(dy + dz + dv + dx)}{dy + dz + dv + dx} = xvzy$$

§. 62. Anmerk. Zusamgesetztere Differentiale, vorzüglich mit Wurzelgrößen, lassen sich wieder am bequemsten durch Transformation integrieren. Ein Paar Beyspiele mögen den Gang der Operation erläutern. Es soll $dx\sqrt{(ax - x)}$ integriert werden.

Man

Man setze $\sqrt{(ax - x)} = p$

$$ax - x = p^2$$

Diff. $adx - dx = 2pdp$

$$dx(a-1) = 2pdp$$

$$dx = \frac{2pdp}{a-1}$$

aber $\sqrt{(ax-x)} = p$

$$dx\sqrt{(ax - x)} = \frac{2p^2dp}{a-1}$$

Intg. $S(dx\sqrt{ax - x}) = \frac{2p^3dp}{(a-1)\times 3dp} = \frac{2p^3}{3a-3}$

Substit. $= \frac{2\sqrt{(ax - x)^3}}{3a-3}$

Auf eine ähnliche Art integriere man auch die Differentialgröße $dy\sqrt{my^2 - y^4}$

Weil $\sqrt{my^2 - y^4} = \sqrt{y^2(m-y^2)} = y\sqrt{m-y^2}$

so auch $dy\sqrt{my^2 - y^4} = ydy\sqrt{m - y^2}$

Nun sey $\sqrt{m - y^2} = p$

$$m - y^2 = p^2$$

diff. $-2ydy = 2pdp$

$$+ydy = -pdp$$

Aber $\sqrt{m - y^2} = p$

$$ydy\sqrt{m - y^2} = -p^2dp$$

$$S(ydy\sqrt{m - y^2}) = -\frac{p^3dp}{3dp}$$

$$= -\tfrac{1}{3}p^3$$

Substit. $S(ydy\sqrt{m - y^2}) = -\frac{1}{3}\sqrt{m - y^2}^3$

§. 63. **Zusatz.** Wie es Irrationalgrößen giebt, aus denen keine vollkommne Wurzel gezogen werden kann; so giebt es auch Differentiale, die sich nie völlig integrieren lassen; man muß also in solchen Fäl-

Fällen zur Annäherung durch Hilfe einer unendlichen abnehmenden Reihe seine Zuflucht nehmen.

§. 64. **Aufgabe.** Von folgenden Größen soll das Integral durch Näherung gefunden werden: $S\left(\frac{3mdz}{a+z}\right)$ und $S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right)$

I. **Auflösung.** $\frac{3mdz}{a+z} = dz\left(\frac{3m}{a+z}\right)$

Man dividiere $\frac{3m}{a+z}$ wirklich, so wird sich zeigen, daß

$$\frac{3m}{a+z} = \frac{3m}{a} - \frac{3mz}{a^2} + \frac{3mz^2}{a^3} - \frac{3mz^3}{a^4} + \frac{3mz^4}{a^5} \ldots\ldots$$

$$\times\, dz = dz$$

$$\frac{3mdz}{a+z} = \frac{3mdz}{a} - \frac{3mzdz}{a^2} + \frac{3mz^2dz}{a^3} + \frac{3mz^3dz}{a^4} + \frac{3mz^4dz}{a^5}$$

$$S\left(\frac{3mdz}{a+z}\right) = \frac{3mz}{a} - \frac{3mz^2}{a^2} + \frac{3mz^3}{a^3} - \frac{3mz^4}{a^4} + \frac{3mz^5}{a^5} \text{ u. s. f.}$$

II. **Auflösung.** $dy\sqrt{y^2+y} = dy \times (y^2+y)^{\frac{1}{2}}$

Nun ist $(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = y + \frac{1}{2} - \frac{1}{8y} - \frac{1}{16y^2} - \frac{5}{128y^3} \ldots$

$$\times\, dy = dy$$

$$dy(y^2+y)^{\frac{1}{2}} = ydy + \frac{dy}{2} - \frac{dy}{8y} - \frac{dy}{16y^2} - \frac{5dy}{128y^3}$$

$$S\left(dy\sqrt{y^2+y}\right) = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} - \frac{y}{8y} - \frac{y}{16y^2} - \frac{5y}{128y^3}$$

$$= \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16y} - \tfrac{5}{128y^2} \text{ u. s. f.}$$

§. 65. Zusatz. Wenn eine Wurzelgröße mehr als zwey Glieder hat, so setzt man, wie bey der Würdenlehre gezeigt worden, mehrere Größen einer einzigen gleich, um zwo Glieder zu bekommen. Siud um diese gehörig erhoben, so kann wieder nach Erheischung des Kalkuls substituiert werden.

§. 66. Zusatz. Es ist auch einleuchteud, daß die unendliche Reihe so eingerichtet werden müße, daß die Glieder immer abnehmen; denn je schneller die Reihe sich ihrer Gränze nähert, desto genauer wird die Rechnung ausfallen.

§. 67. Anmerk. Beständige Größen, die beym Differentiern weggefallen sind, werden nach der Integration durch ein angehängtes $\pm$ C, d. i. $\pm$ Constans, vorgestellt, und lassen sich aus den Umständen der Rechnung leicht wieder bestimmen.

Einige vorläufige Anwendungen der Integralrechnung.

§ 68. Lehrsatz. Der pythagorische Lehrsatz läßt sich sehr kurz und gründlich durch Hilfe der Integralrechnung erweisen.

Satz.

$$ab^2 + bd^2 = ad^2$$

Beweis.

Man werfe Fig. 5. um das rechtwinklichte Dreyeck einen halben Zirkel, so wird die Hypothenuse zum Diameter, und die beyden Lothen zu Sehnen des Zirkels. Weil nun der Diameter eine beständige Größe, und die Sehnen Funktionen voneinander sind, von der Beschaffenheit, daß, wenn die eine

bey

bey Beybehaltung des rechten Winkels wächst, die andere abnimmt, so heiße man den Diameter = a und die Sehnen = x und = y. Es ist nun aus den Gründen der Geometrie. §. 167. erster Fall

	$af \times fc = bf \times fd$
Substit.	$x \times dx = y \times - dy$
Abgek.	$xdx = - ydy$
Integ.	$\frac{x^2}{2} = - \frac{y^2}{2}$
$\times 2$	$x^2 = - y^2 + C$
oder	$x^2 = C - y^2$

Um die Konstante zu finden, dörfen wir nur die Gleichung für den Fall anwenden, wo x durch lauter Wachsthümer zu a, und eben darum y zu Null wird. Also verwandelt sich die Gleichung in diese

	$a^2 = C - 0$
d. i.	$a^2 = C$

Folglich ist die Konstante die Hypothenuse selbst. Nun in der ursprünglichen Gleichung $x^2 = C - y^2$ substituiert, giebt

	$x^2 = a^2 - y^2$
vers.	$x^2 + y^2 = a^2$
oder	$ab^2 + bd^2 = ad^2$

§. 69. Erkl. Der beginnende oder sich entwickelnde Theil einer Linie, in so fern sie wachsend vorgestellt wird, kann, im strengsten Sinne genommen, kein Punkt seyn. Der beginnende Theil einer Fläche, eben so wenig eine Linie, und der eines Körpers, eine Fläche seyn; sondern er ist nothwendig im ersten Falle selbst eine kleine Linie; im zweyten selbst eine solche Fläche, und im dritten

ebenfalls ein solches Körperchen. Man nennt dieß das Element einer Linie, einer Fläche eines Körpers.

§. 70. Zusatz. Wenn in einem Zirkel Fig. 6. neben einer perpendikulären Halbsehne gb eine andere hd unendlich nahe gezogen wird, so giebt das Differential des Perpendikels hd, welches $hk = dy$ ist, und das Differential des Segments bc (wir wollen dießmal die Segmente vom Mittelpunkte aus rechnen) welches $- bd = - gk = - dx$ ist mit der unendlich kleinen krummen Linie gh, ein rechtwinklichtes Dreyeckchen, worinn gh, wegen ihrer unendlichen Kleinheit für eine gerade Linie gelten kann. Es ist demnach

$$gh^2 = gk^2 + hk^2$$
$$= (-dx)^2 + dy^2$$
$$= dx^2 + dy^2$$

$gh = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ das Element der Zirkellinien und andrer derley krumen Linien; weil dieß in allen Punkten, also auch im Anfangspunkte des Zirkels, oder jeder Kurve ist.

§. 71. Erkl. Rektificieren heißt eine gerade Linie finden, die einer andern krummen gegebnen an Länge entweder vollkommen gleich ist, oder ihr so nahe als möglich kömmt.

§. 72. Aufgabe. Ein Stück der Zirkellinie z. B. einen Quadranten zu rektificieren.

Auflösung. Es ist im Zirkel Fig. 4. wenn der Radius für Eins angenommen wird.

$$ab^2 = db \times bh$$

Allein $db = 1 - bc$

$$bh = 1 + bc$$

$db \times bh = 1 - bc^2$ subst. $ab^2 = 1 - bc^2$

und weil $bc = x$

$$ab = y$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

Wenn nun diese Gleichung differenziert, und in selber der Werth für das obige Kurvaelement gefunden, und gehörig integriert wird, so hat man einen Ausdruck für jedes Stück der Zirkellinie, das einem angenommenen x entspricht. Wird $x = 1$ so ist eben darum ein ganzer Quadrant rektificiert, welche Rektifikation in einer abnehmenden unendlichen Reihe ausgedrückt ist. Nun zur Sache

$y^2 = 1 - x^2$

diff. $2ydy = -2xdx$

2 : $ydy = -xdx$

quad. $y^2 dy^2 = x^2 dx^2$

div. durch $y^2 = 1 - x^2$

$$dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2}$$

$$+ dx^2 \qquad + dx^2$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{x^2 dx^2}{1 - x^2} + dx^2.$$

$$= dx^2\left(\frac{x^2}{1-x^2} + 1\right) = dx^2\left(\frac{x^2 + 1 - x^2}{1 - x^2}\right).$$

$$= dx^2\left(\frac{1}{1 - x^2}\right)$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\left(\sqrt{\frac{1}{(1 - x^2}}\right)$$

$$= dx\left(\frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\right) = dx\left(1 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= dx\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \frac{35x^8}{128} ..\right)$$

$$= dx + \frac{x^2\,dx}{2} + \frac{3x^4\,dx}{8} + \frac{5x^6 dx}{16} + \frac{35x^8 dx}{128}$$

$$S\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9 ..}{1152}$$

Wird nun $x = 1$ das ist, gleich dem Radius angenommen, so heißt der Ausdruck für einen integrierten Quadranten $1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} \ldots$ Und weil 4 Quadranten dem Zirkel selbst geben. $4 + \frac{4}{6} + \frac{12}{40} + \frac{20}{112} + \frac{140}{1152} \ldots = 4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} + \frac{5}{28} + \frac{35}{288}$

§ 73. **Anmerk.** Das schlimste bey dieser Reihe ist, daß die Glieder so langsam abnehmen. Man müßte also, um die Zirkellinie zu rektificieren, einige hundert Glieder berechnen, und zusammaddieren; denn die ersten 3 Glieder enthalten nicht einmal 5 Radiusse, da doch andere Rektifikationen über 6 derselben geben; folglich muß noch mehr als ein ganzes in der fortgeführten Reihe stecken; aber wie lang dörfen so geringhaltige Brüche, die über dieß noch immer abnehmen, fortgesetzt werden, bis das Verlangte erhalten wird? geschweigens erst von einer Approximation zu reden, welche uns in etwas zufrieden stellen könnte.

Schneller fällt die Reihe zusammen, wenn man annimmt, daß der Perpendikel y dem halben Radius gleich sey. Weil der Perpendikel einen Sinus vorstellt, und weil in der Trigonometrie erwiesen worden, daß dem halben Radius als Sinus ein Bogen von 30° entspreche, welcher den dritten Theil des Quadranten ausmacht, so erhält man, wenn der gehörige Werth für x substituiert wird, $\frac{2}{3}$ vom Quadranten, oder den 6ten Theil der Peripher, der dem x als Kosinus gerade gegen-

gegenübersteht, rektificiert, indem sich die Rektification vom Sinustotus rückwärts anfängt, und bis zum Sinus reichet. Man findet aber x so:

$$y^2 = 1 - x^2$$

aber $y = \frac{1}{2}$ und eben darum auch

$$y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - x^2$$

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Diesen Werth nun in der Reihe substituiert giebt.

$$S\sqrt{\left(dx^2 + dy^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{6 \times 8} + \frac{3\sqrt{243}}{32 \times 40} + \frac{5\sqrt{2187}}{112 \times 128} + \frac{35\sqrt{19683}}{1152 \times 512} \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\text{Circ.}}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{27}}{48} + \frac{3\sqrt{243}}{1280}, + \frac{5\sqrt{2187}}{14336} + \frac{35\sqrt{19683}}{589824} \ldots\ldots$$

$$\times 6 \quad \text{Circ.} = \frac{6\sqrt{3}}{2} + \frac{6\sqrt{27}}{48} + \frac{18\sqrt{243}}{1280} + \ldots$$

$$\text{Circ.} = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{27}}{8} + \frac{9\sqrt{243}}{640} + \ldots$$

Wenn man hier nun etliche Glieder bearbeitet, und ihre Resultate addiert, so erhält man sehr bald 6, 2 8. . . . Folglich in Diametern 3, 14. . . .

§. 74. An-

§. 74. Anmerk. Leibnizens Rektification durch Hilfe der Tangente von 45° gewährt eine Reihe, die noch weit schneller zusammenfällt. Man sehe hierüber Kästners Analyse oder Klemms Lehrbuch S. 425.

§. 75. Erkl. Eine krumme Linie quadrieren, heißt die Fläche finden, die von derselben entweder ganz begränzt, oder doch wenigst bestimmt wird.

§. 76. Aufgabe. Man soll die allgemeine Quadratur des Zirkels durch Näherung finden.

Auflösung. Man suche allererst das Flächendifferential des Zirkels. Es sey nämlich ein Perpendikel oder Sinus Fig 6. so nahe an den andern hingezogen, als möglich ist, so werden sie ein unendlich kleines Parallelogram geben, welches zur Grundlinie hd = y und zur Höhe bd = dx hat. Folglich ist das Flächenelement des Zirkels so wie jeder derley krummen Linie $y \times dx = ydx$. Hat man nun in der Gleichung des Zirkels ein Aequivalent dafür gefunden, und integriert, so ist ein Stück des Zirkels, das zwischen einem gewiesen Sinus, seinem Kosinus und Sinustotus liegt, wirklich quadriert. Weil der Sinus durch y und der Kosinus durch x ausgedrückt worden, so setze man x = 1 so wird y = 0 und das quadrierte Stück eben darum ein Quadrant seyn. Es ist demnach in Zirkel wie oben.

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y = \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times dx \qquad ydx = dx(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= dx\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{x^8}{128} \dots\right)$$

$$y\,dx = dx - \frac{x^2\,dx}{2} - \frac{x^4\,dx}{8} - \frac{x^6\,dx}{16} - \frac{5x^8\,dx}{128} \ldots\ldots$$

$$S(y\,dx) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{x^9}{1152} \ldots$$

$x = r = 1$ gesetzt

$$S(y\,dx) = 1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} - \tfrac{1}{1152} \ldots$$

Eine Reihe welche schnell zusammfällt; wenn sie nun durch 4 multipliciert wird hat man den ganzen Zirkel; also

$$\square\,\text{Circ.} = 4 - \tfrac{4}{6} - \tfrac{4}{40} - \tfrac{4}{112} - \tfrac{4}{1152} \ldots$$
$$= 4 - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{28} - \tfrac{1}{288} \ldots$$

Und wenn man etliche Glieder nach der Dezimalrechnung bearbeitet, und vom ersten Gliede 4 abziehet, so bekömmt man 3, 14. . . . . .

§. 77. Zusatz. Es enthält also der Zirkel gerade so viel Radiusquadrate in der Fläche, als viel Diameter die Peripherie in der Länge enthält.

§. 78. Zusatz. Die obige Reihe $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$ ist folglich auch dem Inhalt nach, noch so groß als $x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{112} - \ldots$

§. 79. Erkl. Kubieren heißt den Inhalt eines Körpers finden, der von einer krummen Fläche entweder ganz oder zum Theil begränzt ist.

§. 82. Auf-

§. 80. **Aufgabe.** Den körperlichen Inhalt eines geradstehenden Kegels allgemein zu bestimmen.

Auflösung. Man bestimme vor allen das Körperelement. Wenn Fig. 7. die Höhe des Kegels x heißt, so ist jeder kleinstmöglichste Wachsthum derselben dx. Da ferner der Durchmesser eines jeden Kegeldurchschnitts, der mit der Basis parallel läuft, eine veränderliche Größe ist, so mag er y heißen, folglich ist ein solcher Zirkel $\frac{y^2 \pi}{4}$ Man nehme endlich, wo man will, im Kegel zwo solche unendlich nahe Zirkelflächen an, so werden diese, als ein unendlich niedrer Zylinder, der nämlich dx zur Höhe hat, das Körperelement enthalten, und sich durch $\frac{y^2 \pi dx}{4}$ ausdrücken lassen, weil dieß das Produkt der Grundfläche in die Höhe ist.

Nun mache man eine Gleichung für irgend eine Eigenschaft des Kegels ausfindig. Es ist z. B. in selbem wegen dem Parallelismus.

$$af : ah = bc : gl$$

heißt aber $ah = a$ und $gl = b$ so ist nach der Substit. $x : a = y : b$

$$ay = bx$$

$$y = \frac{bx}{a}$$

$$\frac{\pi y dx}{4} \times \qquad \frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b \pi y x dx}{4^a}$$

Für

Für y in der zwoten Seite der Gleichung seinen Werth $\frac{bx}{a}$ substituiert.

Giebt $\frac{\pi y^2 dx}{4} = \frac{b^2 \pi x^2 dx}{4a^2}$

$S\left(\frac{\pi y^2 dx}{4}\right) = \frac{b^2 \pi x^3}{12a^2}$ Man lasse x so lange wachsen, bis es = a wird, so ist

$$S = \frac{b^2 \pi a^3}{12a^2} = \frac{b^2 \pi a}{12}$$

oder $S = \frac{b^2 \pi}{4} \times \frac{a}{3}$. Wenn nun die Grundfläche $\frac{b^2 \pi}{4} = B$ ist, so giebt die Kubatur des Kegels $B \times \frac{a}{3}$. Das heißt, das Produkt der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe.

§. 81. Anmerk. Ich versprach in der Stereometrie §. 225, hier einen algebraischen Beweis von dem Satze zu geben, daß die Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und Grundfläche sey; oder was eins ist, daß dessen Inhalt der dritte Theil des Produktes aus der Grundfläche in dessen Höhe ausmache. Weil dieß aber in der Elementargeometrie unmittelbar vom Kegel wei schwerer läßt, so glaube ich um so mehr, hier Wort gehalten zu haben, da ich geradezu den obbemeldten Satz vom Kegel erwies.

§. 82. Anmerk. Man merke sich vorzüglich die drey Elemente, weil sie in der höhern Geometrie öfters genutzt werden. Das Linienelement ist demnach $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; Das Flächenelement, y d x und das Körperelement. $\frac{y^2 \pi dx}{4}$. Das Oberflächenelement werden wir später kennen lehrnen.

Höhere

Höhere Geometrie.

§. 1. Erklärung.

Die höhere Geometrie untersucht die Natur, und die Gesetze der krummen Linien, vorzüglich derjenigen, die sich durch Ebnen aus Kegeln ausschneiden lassen.

§. 2. **Zusatz.** Die Gesetze aber, nach welchen eine krumme Linie beschrieben ist, lassen sich größtentheils nur durch Hilfe gerader Linien bestimmen, derer Beschaffenheiten (affectiones) gegen einander uns schon genugsam aus der Elementargeometrie bekannt seyn müssen. Sie haben hier verschiedene Namen, als Ordinaten, Absciſſen, Achsen, Durchmesser, Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien u. s. f.

Vorbegriffe der nothwendigsten Hilfslinien.

§. 3. **Erkl.** Wenn zu einer krummen Linie eine gerade, wo immer gezogen wird, so heißt der

Ab-

Abstand eines jeden Punktes der Kurve von einem Punkte der geraden Linie eine Ordinate, welche ebenfalls durch eine andere gerade Linie ausgedrückt wird. Ist der Abstand eines Punktes der Kurve von der geraden Linie der kürzeste unter allen, die von diesen Punkte möglich sind, so nennt man die Ordinate rechtwinklicht, welche auch immer am gewöhnlichsten vorkömmt. Ein abgeschnittnes Stück der geraden Linie von einem bestimmten Anfangspunkt an gerechnet, wird Abscisse genannt; und die Lienie selbst worauf die Abscissen abgeschnitteu werden, heißt Abscissenlinie. So sind Fig. 8. ad, gb, fc Ordinaten; ab, ac Abscissen, und ak die Abscissenlinie.

§. 4. Zusatz. Je mehr nun Ordinaten gezogen, und je genauer selbe sammt ihren Abscissen gemessen werden, desto richtiger wird auch das Gesetz angegeben, nach welcher so eine krumme Linie beschrieben ist.

§. 5. Erkl. Wenn die Kurve eine merkliche Höhlung bildet, oder gar in sich zurückkehrt, so, daß man bequem von jedem Punkt zum andern gerade Parallellinien ziehen kann, welche alle rechtwinklicht in zween gleiche Theile zu theilen eine andere gerade Linie in Stande ist, so heißt diese letztere Linie die Achse der Kurve, und dient zugleich für die Abscissenlienie. Im Zirkel thut dieß der Diameter, Fig. 9. folglich ist derselbe nach der Sprache der höhern Geometrie die Achse des Zirkels, jeder Perpendikel darauf eine Ordinate, und die Segmente der Achse — Abscissen.

§. 6.

§. 6. Willk. Satz. Weil die Ordinaten, und Abscissen Funktionen von einander sind, welche oft unter dem Namen Koordinaten begriffen sind, so werden sie im Kalkul durch die letzten Buchstaben des Alphabets ausgedrückt. Gemeiniglich bedeutet y eine Ordinate und x seine Abscisse.

§. 7. Anmerk. Die Alten nannten die ganzen Linien, von einem Punkte der Kurva bis zum andern, Ordinaten, und ihre Hälften, von der Kurve bis zur Achse, Semiordinaten. Die Neuern aber, welche meist nur die Hälfte einer solchen krummen Linie betrachten; weil die andere Hälfte, wegen der Gleichheit, die nämlichen Eigenschaften haben muß, nur, daß in Rücksicht der entgegengesetzten Lage, wie schon einestheils vom Zirkel in der Trigonometrie gemeldet worden, die Semiordiaten negativ sind, heißen diese Hälften schlechtweg Ordinaten, und wenn je von den ganzen Ordinaten irgend die Rede ist, werden selbe von ihnen Doppelordinaten genennt.

§. 8. Erkl. Aus dem Verhältnissen der Ordinaten zu ihren Abscissen werden mit Zuziehung einer oder mehrern beständigen Größen Gleichungen formiert, die die Gleichungen für die krummen Linien heißen. So wäre die für den Zirkel: $y^2 = x(a - x) = ax - x^2$, wo a die Achse bezeichnet. Die Kurven nun, bey welchen das angeht heißen algebraisch; die übrigen, woraus sich keine Gleichung erheben läßt, trauscendentisch. Bey einer schneckenartig gewundnen Linie thun Ordinaten und Abscissen keine guten Dienste; folglich ist es auch nicht wohl möglich, für sie eine Gleichung ausfindig zu machen. Sie wird daher mit Recht zu den transcendentischen Linien gerechnet.

Die algebraischen Linien werden ferner eingetheilt in Geschlechter oder Ordnungen, und endlich noch in Familien. Die Geschlechter werden nach

der

der Anzahl der Abmessungen, die in den Gleichungen der Linien vorkommen, benennet, zwo Abmessungen geben eine Linie von der ersten Ordnung oder Geschlecht: drey von der zwoten u. s. f. Zu ein und der nämlichen Familie gehören endlich alle Linien, deren Gleichungen so aussehen, daß überall die nämlichen Glieder obwalten, wenn sie auch gleich in ihren Exponenten verschieden sind.

Z. B. $z^2 = av$ und $y^2 = bx$ gehören zu einem Geschlechte; weil überall zwo Abmessungen statt haben. $\xi^3 = c^3 x^2$ und $\xi^2 = (c - x)x$ sind aber von einer Familie.

§. 9. Erkl. Die Tangente ist, wie in der Geometrie beym Zirkel, eine gerade Linie, die die Kurve in einem einzigen Punkte berührt; aber sie hat hier wieder, wie in der Trigonometrie, eine gewiße Länge, und wird so weit auf einer Seite fortgezogen, bis sie di verlängerte Absciße erreicht, welche der Ordinate des Berührungspunkts entspricht. Diese verlängerte Absciße ist die Subtangente. Ein aus der Abscißenlinie auf den Berührungspunkt der Tangente hingefällter Perpendikel heißt die Normallinie. Das Stück endlich der Abscißenlinie zwischen der Ordinate des Berührungspunktes und der Normal wird die Subtangente genennt. So ist im Zirkel Fig. 10, am die Tangente, ap die Subtangente, mq die Normal, welche im Zirkel allemal der Radius selbst ist, wie aus der Elementargeometrie bekannt ist, und pq die Subnormal, welche Linien alle bey jeder krummen Linie auf eine ähnliche Art gezogen werden.

Von

Von Kegelschnitten.

§. 10. **Erkl.** Jeder Kegel läßt sich durch eine unebne Fläche unzählige Mal; durch eine ebne Fläche aber nur fünfmal schneiden, als

1) durch die Achse des Kegels, welches ein Dreyeck giebt, und folglich in die Elementargeometrie gehört, wie Fig. 11. lhs;

2) parallel mit der Grundfläche des Kegels, wo der Schnitt ein Zirkel wird, der ebenfalls schon größtentheils in der Elementargeometrie abgehandelt worden, z. B. abc;

3) parallel mit einer Seitenlinie des Kegels, wodurch die erste Linie der höhern Geometrie entsteht, welche den Namen der Parabel hat; als hgk;

4) parallel mit der Achse des Kegels, in welchen Fall man mehrmals eine krumme hieher gehörige Linie erhält, die Hyperbel heißt, nämlich vdf

5) endlich durch einen Schnitt, der weder mit einer Seite, weder mit der Grundfläche noch mit der Achse parallel läuft, der die Ellipse giebt, wie pmq.

§. 11. Anmerk. Die Ursache der Benennungen, der drey leztern Kegelschnitte, denn die übrigen kommen hier alle nicht in Betracht, werden wir weiter unten bey jeder dieser Linie angeben;

Von der Parabel.

§. 12. **Lehrsatz.** In der Parabel ist überall das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkt der Abscisse in eine bestimmte beständige Größe, die

so-

sowohl hier, als in denen übrigen beyden Linien der Parameter genannt, und durch seinen Anfangsbuchstaben p ausgedrückt wird.

Satz 3.

$$y^2 = px$$

Beweis.

Man zeichne diese krumme Linie in einem Kegel Fig. 12., und schneide durch einen Zirkel, der mit der Grundfläche des Kegels parallel geht, die Parabel, wo man will, so kann der Diameter des Zirkels so gezogen werden, daß eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels, und der Parabel rechtwinklicht auf einen gemeinschaftlichen Punkt der beyden Achsen fällt. Es ist nun aus der Eigenschaft des Zirkels

$$pm^2 = cp \times pb.$$

Man suche nun für cp und pb andere Werthe, welches geschehen kann, wenn von dem Scheitel der Parabel — so heißt der Anfangspunkt eines Kegelschnitts — eine Paralellinie mit der Achse des Zirkels bis an die andere Seitenlinie gezogen wird. Es ist daher $cp = da$ wegen Parallelismus. Ferner ist aus gleichem Grunde,

$\triangle dfa \sim \triangle apb$ wegen innern und äußern Winkeln.

daher $df : da = ap : pb$

$$\frac{da \times ap}{df} = pb$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$pm^2 = \frac{da \times da \times ap}{df} = \frac{da^2}{df} \times ap.$$

Da aber der Quotus wegen den beständigen Größen da und df ebenfalls beständig ist, und p heißen kann, gleichwie die Ordinate pm durch y und die Abscisse ap durch x ausgedruckt wird, so ist es nach der Substitution.

$$y^2 = p x$$

§. 13. Anmerk. Der Name Parabel (παραβολη) kömmt von der völligen Gleichheit des Quadrats der Ordinate und des Produkts aus der Abscisse in den Parameter her. In der Ellipse wird, wie wir in der Folge sehen werden, etwas davon abgehen, daher ελλειψις (Mangel) und in der Hyperbel hingegen ein Ueberfluß vorhanden seyn, welches ebenfalls das Wort ὑπερβολη ausdrückt.

§. 14. Zusatz. Es ist daher der Parameter die dritte Proportionallinie zur Abscisse und Ordinate, weil die Gleichung $y^2 = px$ in diese stätige Proportion $x : y : p$ aufgelöset werden kann. Er läßt sich demnach in einer gegebnen Parabel leicht durch Zeichung als eine einzige beständige Linie sichtbar machen. Man beschreibe nur Fig. 13. auf der Achse einen halben Zirkel, der durch dem Scheitelpunkt geht, und ziehe aus jenem Punkt der Parabel, wo sie der Zirkel schneidet, eine Ordinate, so ist das erste Segment der Zirkelachse die Abscisse und das zweyte der Parameter, weil nur in diesem Falle $y^2 = xp$ seyn kann.

§. 15. Lehrsatz. Der Parameter ist auch gleich dem Produkte aus der Summe was immer für zwoer Ordinaten, in ihre Differenz, wenn es durch die Differenz ihrer Abscissen dividiert worden.

Satz.

$$\frac{(Y + y)(Y - y)}{X - x} = p$$

Be-

Beweis.

$$(Y + y) \times (Y - y) = Y^2 - y^2$$

aber $Y^2 = pX$

und $y^2 = px$

subst. $(Y + y) \times (Y - y) = pX - px = p(X - x)$

$: (X - x)$ $$\frac{(Y + y) \times (Y - y)}{X - x} = p$$

§. 16. Zusatz. Weil die Gleichung für die Parabel von der ersten Ordnung ist, folglich zwo Abmessungen hat; denn es wird nach Ausziehung der Wurzel $y = \pm \sqrt{px}$, so kann die Ordinate positiv und negativ seyn: das heißt, jede Absciße hat in der Parabel zwo gleiche entgegengesetzte Ordinaten.

§. 17. Zusatz. Die Quadrate der Ordinaten verhalten sich wie die Abscissen; denn weil in jedem Punkt der Parabel

so ist auch $y^2 = px$ seyn muß
$Y^2 = pX$

$$y^2 : Y^2 = px : pX$$
$$y^2 : Y^2 = x : X \qquad : p$$

§. 18. Zusatz. Die Parabel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie der Kreis; denn wäre sie es, so müßte sich in dem Fall, wenn die Ordinate zu Null wird, noch ein wahrer positiver Werth für die Absciße finden lassen, wie in der Gleichung für den Zirkel.

Dort ist $y^2 = ax - x^2$

$y^2 = o$

$o = ax - x^2$

$x^2 = ax$ und $x = a$, wo die Abscisse der ganzen Achse gleicht. Hier aber in $y^2 = px$, wenn für y, folglich auch für $y^2 = o$ gesetzt wird giebt es $o = px$

$:p$ $o = x$ Das ist, die Achse der Parabel wird nur im Anfang, und dann nicht mehr geschnitten; denn da trifft es zu, daß wenn $y = o$ auch $x = o$ bleibt; und umgekehrt, wenn $x = o$ so wird auch $y = o$ seyn.

§. 19. Anmerk. Man könnte dieß auch daraus beweisen, weil es in der Parabel keine größte Ordinate, wie im Kreise giebt. Denn man verfahre mit der Gleichung auf eine ähnliche Art, wie §. 50 mit der des Zirkels.

$$y^2 = px$$

diff. $$2y\,dy = p\,dx$$

$$dy = \frac{p\,dx}{2y}$$

$dx:$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$$

$\times 2y$ $$o = \frac{p}{2y}$$

so ist $o = p$. Also würde die Parabel nur in dem Fall eine größte Ordinate verstatten, wenn sie keinen Parameter hätte, das heißt, wenn sie keine Parabel wäre, welches ein baarer Widerspruch ist.

§. 20. Zusatz. Es wachsen demnach die Koordinaten, als Funktionen von einander, bis ins Unendliche fort.

§. 21. Erkl. Jener Punkt auf der Achse der Parabel, und eines jeden Kegelschnitts, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt, wird der Brennpunkt, und die Abscisse Brennweite, Fokallänge genannt; die Ursache dieser Benennung wird in der Katoptrick angegeben.

§. 22. Lehrsatz. Die Brennweite in der Parabel, ist dem 4ten Theil des Parameters gleich.

Voraussetzung.

$$y = \tfrac{1}{2} p$$

Satz.

$$x = \tfrac{1}{4} p$$

Beweis.

In jedem Punkt der Parabel ist.

$$y^2 = p x$$

aber $y = \tfrac{1}{2} p$

also $y^2 = \tfrac{1}{4} p^2$

$$p x = \tfrac{1}{4} p^2$$

$: p$

$$x = \tfrac{1}{4} p$$

§. 23. Aufgabe. Eine Parabel geometrisch zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe Fig. 14. eine Achse von unbestimmter Länge, schneide von einem angenommenen Scheitelpunkt s beliebige gleiche Theile ab, und werfe einen halben Zirkel darüber, so wird die

Ordinate auf dem ersten Theilungspunkte, der halbe Parameter, der erste Theil selbst, die Fokallänge, und die letzten vier Theile zusammengenommen, der Parameter p seyn; Denn

$$mp^2 = ap \times pd \quad \text{weil} \quad mp = y$$
oder
$$y^2 = xp \qquad ap = x$$
$$\text{oder} \quad y^2 = 1 \times 4 = 4 \quad \text{und} \quad pd = p$$
$$y = 2, \text{ d. i. } \tfrac{1}{2} p$$

Wenn nun mehrere Halbzirkel von verschiedner Größe auf der Achse beschrieben werden, die sich im Scheitel einander berühren, so sind alle Ordinaten, die man in der Entfernung des Parameters von den verschiednen Endpunkten der Zirkelachsen zieht, gemeinschaftliche Ordinaten der Parabel, weil überall $y^2 = px$ ist.

§. 24. Lehrsatz. Zwo Sehnen (chordæ) vom Scheitel der Parabel ausgezogen, verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Produkten der zugehörigen Abscissen in die Summe eben dieser Abscissen und des Parameters.

Satz. Fig. 19.

$$c : C = \sqrt{x\,(x + p)} : \sqrt{X\,(X + p)}$$

Beweis.

$$\text{Es ist} \quad c^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{eben so wie} \quad C^2 = X^2 + Y^2$$
$$c^2 : C^2 = (x^2 + y^2) : (X^2 + Y^2)$$
$$\text{aber} \quad y^2 = px$$
$$\text{und} \quad Y^2 = pX$$
$$\text{substit.} \quad c^2 : C^2 = (x^2 + px) : (X^2 + pX)$$
$$\text{oder} \quad = x(x + p) : X(X + p)$$
$$\sqrt{} \quad c : C = \sqrt{x\,(x + p)} : \sqrt{X(X + p)}$$

§. 25.

§. 25. Lehrsatz. Die Entfernung eines jeden Punktes der Parabel vom Brennpunkt, oder der Brennstrahl ist gleich der entsprechenden Abscisse sammt der Fokallänge.

Satz. Fig. 15.

$$mf = x + \tfrac{1}{4} p$$

Beweis.

$$mf^2 = fp^2 + mp^2$$

subſtit. $mf^2 = (x - \tfrac{1}{4} p)^2 + y^2$

und weil $y^2 = px$

$$mf^2 = x^2 - \tfrac{1}{2} px + \tfrac{1}{16} p^2 + px$$

abgek. $mf^2 = x^2 + \tfrac{1}{2} px + \tfrac{1}{16} p^2$

$$mf = x + \tfrac{1}{4} p$$

§. 26. Zusatz. Daraus folgten wieder einige Arten Parabeln zu beschreiben. Sie alle anzuführen wäre zu weitläuftig, da sie ohnedem in den meisten mathematischen Lehrbüchern anzutreffen sind.

§. 27. Aufgabe. Durch einen gegebnen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe Fig. 16. den Brennstrahl auf den gegebnen Punkt hin, ferner von diesen Punkt aus eine Parallellinie mit der rückwärts verlängerten Achse, und theile den Winkel welchen der Brennstrahl und die Parallellinie macht, in zween gleiche Theile, so wird die Theilungslinie, wenn man sie so lange fortzieht, bis selbe die verlängerte Achse erreicht, die verlangte Tangente seyn.

Be-

Beweis.

Zu einer Tangente wird erfodert, daß sie die Kurve nur in einem einzigen Punkt berühre, und nicht schneide. Schnitte sie allenfalls die Kurve, so müßte noch ein Punkt dieser geraden Linie, weil sie doch wenigst eine tangentenartige Lage hätte, früher oder später in der Parabel liegen, wenn man beyde weit genug verlängert. Daß aber dies nicht seyn könne, wird so erwiesen. Man schließe den getheilten Winkel vom Brennpunkt an, zu einem gleichschenklichten Dreyeck. Folglich ist auch diese Schlußseite rechtwinklicht in zween gleiche Theile getheilt. Endlich ziehe man von dem Endpunkt des äußern Schenkels eine Parallellinie mit der Ordinate bis an die verlängerte Achse. Es ist nun aus der Konstruktion.

$$dm = fm = x + \tfrac{1}{4} p$$
$$dm = bq = ba + x$$

$$x + \tfrac{1}{4} p = ba + x \quad \text{und abgek.}$$
$$\tfrac{1}{4} p = ba$$

Wenn nun z. B. o ein Punkt in der Parabel wäre, so müßte auch $fo = x + \tfrac{1}{4} p$ seyn. Aber dieß ist unrichtig; Denn

$$no = br = ba + ar = \tfrac{1}{4} p + x$$

Allein $no < do$ als Kathet und Hypothenus: setzen wir es sey no um z kleiner als do

folglich $no = do - z$

$$\tfrac{1}{4} p + x = do - z$$

Aber $do = fo$; denn das Dreyeck fdo ist gleichschenklicht, weil der Perpendikel oc die Grundlinie fd in gleiche Theile theilt.

subst.

subst. $\frac{1}{4}p + x = fo - z$ Welches der Eigen-
$\frac{1}{4}p + x + z = fo$ schaft des Brennstrahls der Parabel widerspricht. Den nämlichen Widerspruch findet man auch, wenn ein Punkt oberhalb der Berührung angenommen wird. Es ist also vollkommen erwiesen, daß tm eine wahre Tangente sey.

§. 28. Zusatz. Die Tangentialwinkel, das heißt jene Winkel, die der Brennstrahl, und die verlängerte Parallellinie mit der Tangente machen, sind einander gleich; denn es ist Fig. 16.

$x = y$ wegen der Theilung.
$s = y$ als Vertikalw.

Also $= x = s$

§. 29. Anmerk Es ist ein in der Physik erwiesener Satz, daß der Ausfallwinkel eines irgendwo abgeprellten Lichtstrahls eben so groß sey, als der Einfallwinkel. Wenn man nun eine genau verfertigte, und gut polierte Paraboloide, d. i., einen Körper, dessen innere Höhlung von der Umwälzung einer Parabel um ihre Achse gebildet worden, so gegen die Sonne hält, daß alle Strahlen parallel mit der Achse einfallen, so müssen sie sich sämmtlich im Brennpunkte vereinigen, und hier nach der Größe eines solchen parabolischen Brennspiegels eine ausserordentliche Hitze verursachen. Denn die Richtung eines jeden Punkts der Paraboloide stellt dessen Tangente vor; also würde der Strahl unter dem nämlichen Gesetz auf der Tangente abprellen, wie auf dem ihr korrespondierenden Parabelpunkte. Da aber die Tangentialwinkel, d. i., der Ein- und Ausfallwinkel des Strahls neben ihrer erwiesnen Gleichheit auch noch die Eigenschaft haben, daß ein Schenkel parallel mit der Achse fortläuft, und der andere zum Brennstrahl wird, so müssen nothwendig alle parallel einfallenden Strahlen auf den Brennpunkt hingeleitet, und dort vereiniget werden.

Umgekehrt läßt sich auch aus den nämlichen Gründen behaupten, daß ein in Brennpunkt gestellter leichtender Körper alle davon ausgehenden Strahl parallel mit der Achse fort-

fortpflanze, wie die aus Pappendekel gemachten Paraboloiden in einigen Studierstuben sattsam beweisen.

Eben so vortheilhaft sind auch die parabolischen Sprach- und Hörröhre, weil im ersten Falle die Schallstrahlen, welche gleiches Gesetz der Abprellung beobachten, parallel bis zu dem Ohre des Horchenden fortgestoßen; im zweyten Falle hingegen eine Menge Parallelstrahlen des Schalls aufgefangen, und in dem Brennpunkte am Ohre konzentriert werden.

§. 30. **Lehrsatz.** **Die Subtangente ist der doppelten Abscisse gleich.**

Satz. Fig. 16.

$$\text{Subt.} = 2x.$$

Beweis.

$\triangle\, tfc = \triangle\, cdm$ wegen Wechsel- und Vertikalw.
$\triangle\, fmc = \triangle\, cdm$

$$\triangle\, tfc = \triangle\, cdm \quad \text{also}$$
$$tf = dm = fm \quad \text{oder}$$
$$ta + af = aq + af$$
$$ta = aq$$
aber
$$ta + aq = tq$$
$$aq + aq = tq$$
$$2aq = tq$$
$$2x = \text{Subt.}$$

§. 31. **Lehrsatz.** Die Tangente in der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des vierfachen Quadrats der Abscisse, und des Produkts der Abscisse in den Parameter.

Satz. Fig. 16.

$$\text{Tang.} = \sqrt{4x^2 + px}$$

Be-

Beweis.

$$tm^2 = tq^2 + qm^2!$$

substit. $Tang^2 = (2x)^2 + y^2$

$Tang^2 = 4x^2 + px$

$\surd$ $Tang = \sqrt{4x^2 + px}$

§. 32. Anmerk. Auf eine ähnliche Art lassen sich auch die Normal und Subnormal bestimmen. Wir wollen aber dieß durch die Differentialrechnung leisten.

§. 33. Lehrsatz. Die Differentialausdrücke der Tangente, Subtangente, Normal- und Subnormallinie, deren Aequivalente nachher in den differenzierten Gleichungen dieser krummen Linien gesucht werden müsseu, sind nicht nur für die Parabel, sondern für alle allgebraischen Kurven folgende:

Satz.

1) $Tang = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$

2) $Subtang = \frac{ydx}{dy}$

3) $Norm. = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$

4) $Subnorm. = \frac{ydy}{dx}$

Beweise.

Man nehme an, daß die beyden Ordinaten Fig. 17. PM und pm einander unendlich nahe liegen, so wird $Mr = dx$ und $rm = dy$ seyn. folglich $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, weil sich die unend-

endlich kurze Linie Mm für eine gerade Hypothenuse ansehen läßt. Alle vier Dreyecke tMq, tMP, PMq und Mrm sind ferner wegen rechten Winkeln, und Parallelismus einander ähnlich seyn, denn wegen rechten und gemeinschaftlichen Winkel.

$tMP \backsim tMq$

$tMP \backsim Mrm$ wegen gleichen Winkeln bey t und M.

$tMq \backsim Mrm$

Endlich $tMq \backsim PMq$ aus obigen Gründen.

Also $Mrm \backsim PMq$.

Es ist erstens, wegen denen ähnlichen $\triangle\triangle$ tMP und Mrm

$$tM : PM = Mm : rm$$

$$\text{Tang} : y = \sqrt{dx^2 + dy^2} : dy$$

$$\text{Tang} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$$

Zweytens wegen den nämlichen $\triangle\triangle$

$$tP : PM = Mr : rm$$

$$\text{Subtang} : y = dx : dy$$

$$\text{Subtang} = \frac{y\,dx}{dy}$$

Drittens wegen tMq und Mrm

$$PM : Mq = Mr : Mm$$

$$y : \text{Norm.} = dx : \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$\text{Norm.} = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$$

Viertens wegen eben diesen Dreyecken

$$PM : Pq = Mr : rm$$

$$y : \text{Subnorm.} = dx : dy$$

$$\text{Subnorm.} = \frac{y\,dy}{dx}$$

§. 34. An-

§. 34. **Anmerk.** Um sich zu überzeugen, daß man durch diese Ausdrücke, die nämlichen Werthe erhalte, als wie oben aus dem Verhältniß der Linien selbst zu einander, wollen wir die Subtangente auch auf diese Art bestimmen. Normal und Subnormal suchen wir nachher ohnehin durch die eben gefundenen Differentialformeln.

Sub! = 2x.

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

:p $$\frac{2ydy}{p} = dx$$

× y

: dy $$\frac{2y^2dy}{p} = ydx$$

$$\frac{2y^2}{p} = \frac{ydx}{dy}$$

aber $$\text{subtang} = \frac{ydx}{dy}$$

$$\text{subtang} = \frac{2y^2}{p} = \frac{2px}{p} = 2x$$

§. 35. **Lehrsatz.** Die Normal der Parabel ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe des Produkts der Abscisse in den Parameter, und des vierten Theils des Parameterquadrats.

Satz.

$$\text{Norm} = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}$$

Be-

Beweis.

$$y^2 = px$$

diff. $2ydy = pdx$

quad. $4y^2dy^2 = p^2dx^2$

$+ 4y^2dx^2 + 4y^2dx^2$

$$4y^2dy^2 + 4y^2dx^2 = p^2dx^2 + 4y^2dx^2$$

4: $y^2dy^2 + y^2dx^2 = \frac{1}{4}p^2dx^2 + y^2dx^2$

abgek. $y^2(dy^2 + dx^2) = (\frac{1}{4}p^2 + y^2)dx^2$

$= (\frac{1}{4}p^2 + px)dx^2$

$\surd$ $y\sqrt{dy^2 + dx^2} = dx\sqrt{\frac{1}{4}p^2 + px}$

: dx $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx} = \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

aber $\frac{y\sqrt{dy^2 + dx^2}}{dx} =$ Norm.

Norm. $= \sqrt{px + \frac{1}{4}p^2}$

§. 36. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Parabel ist dem halben Parameter gleich.

Satz.

Subnorm. $= \frac{1}{2}p$.

Beweis.

	$y^2 = px$
diff.	$2ydy = pdx$
:2	$ydy = \frac{pdx}{2}$
:dx	$\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p$
Aber	$\frac{ydy}{dx} = \text{Subnorm.}$
Folglich	$\text{Subnorm.} = \frac{1}{2}p$

§. 37. **Anmerk.** Um den Nutzen einer, oder der andern dieser Linien anschauend zu machen, wollen wir folgende Aufgabe hersetzen. In einer Gegend von ziemlich ebener Aussicht sollte eine Sternwarte angelegt werden. Doch so, daß man wenigst einen Horizont von 20 geographischen Quadratmeilen von der Erdkugel vor sich liegen hätte, wie hoch müßte sie werden?

Auflösung. Man nehme an, die Erde sey eine wahre Kugel. Wenn die Sternwarte c d Fig. 18. rückwärts durch die Erde verlängert würde, so gäbe sie unfehlbar eine Erdachse ab. Die letzten Sehstrahlen des Auges, welche noch auf der Erdkugel aufliegen wie a c, sind, ihre Brechung abgerechnet, als eben so viele Tangenten ringsum anzusehen, wovon der Thurm c d sammt der kleinen Abscisse d b, die einem solchen Bogen a d bis zur Tangente entspricht, die Subtangente ist. Ist nun dieses x bekannt, so weiß man eben darum auch die Subtangente, welche, wenn x davon abgezogen worden, die verlangte Höhe des Thurms giebt. Es kann aber die Abscisse so gefunden werden. Man bestimme in der differentierten Zirkelgleichung das Oberflächenelement, integriere es, und setze das Integral, wo das x sicher vorkommen muß, denen 20 Meilen gleich, so läßt sich der Werth der entsprechenden Abscisse in rheinländischen Schuhen ausdrücken. Es ist aber das Oberflächenelement $2\pi y \sqrt{(dx + dy^2)}$, weil $2\pi\ \pi y$ jeden Zirkel des runden Körpers vorstellt, und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ den unendlich kleinen Abstand von einem Zirkel zum andern. Nun ist die Zirkelgleichung,

$$y^2 = ax - x^2$$

diff. $$2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$$

quad. $$4y^2 dy^2 = a^2 dx^2 - 4ax\,dx^2 + 4x^2 dx^2$$

: $$4y^2 = 4ax - 4x^2$$

$$dy^2 = \frac{a^2 dx^2 - 4ax\,dx^2 + 4x^2 dx^2}{4ax - 4x^2}$$

$$+ dx^2 \qquad + dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 dx^2 - 4ax\,dx^2 + 4x^2 dx^2}{4ax - 4x^2} + dx^2.$$

$$= \frac{a^2 dx^2 - 4ax\,dx^2 + 4x^2 dx^2 + 4ax\,dx^2 - 4x^2 dx^2}{4ax - 4x^2}$$

Ab.

Abgek. $dy^2 + dx^2 = \frac{a^2 dx^2}{4ax - 4x^2}$

$$\sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax - x^2}}$$

$$\times 2y \quad = \quad \times 2\sqrt{ax - x^2}$$

$$2y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\,dx$$

$$\times \pi \qquad \times \pi$$

$$2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi\,dx$$

$$S(2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = a\pi x)$$

Es ist also $a\pi x$ der Ausdruck für jeden Oberflächenabschnitt auf der Kugel. Auf der Erdkugel ist $a = 1720 \times 23664$ rheinländ. Schuhe.

Also $a\pi x = 20$ Meilen

$x = \frac{20}{a\pi}$ Dieß nun in rheinländischen Schuhen ausgedrückt.

$$x = \frac{23664 \times 23664 \times 20}{1720 \times 23664 \times 3{,}141}$$

$$= \frac{23664 \times 2}{172 \times 3{,}141} = \frac{23664}{86 \times 3{,}141}$$

$$= \frac{11832}{43 \times 3{,}141} = 87{,}6$$

End-

Endlich berechne man auch die Subtangente einer Kugel und ziehe das x davon ab, so hat man die verlangte Höhe des Thurms.

$$y^2 = ax - x^2$$

$$2y\,dy = a\,dx - 2x\,dx$$

$$\frac{2y\,dy}{a-2x} = dx$$

$\times y$ $$\frac{2y^2\,dy}{a-2x} = y\,dx$$

$: dy$ $$\frac{2y^2}{a-2x} = \frac{y\,dx}{dy} = \text{Subtang.}$$

allein $y^2 = ax - x^2$

subst. $$\frac{2(ax - x^2)}{a - 2x} = \text{Subt.}$$

Das x abgezogen.

$$\frac{2(ax - x^2)}{a - 2x} - x = \frac{2ax - 2x^2 - ax + 2x^2}{a - 2x}$$

$$= \frac{ax}{a - 2x}.$$ In Zahlen ausgedrückt.

$$\frac{1720 \times 23664 \times 87,6}{1720 \times 23664 - 2 \times 87,6}$$

$$= \frac{3565502208}{40702080 - 175,2}$$

$$= \frac{3565502208}{40701904,8} = 87,6 \text{ Schuhe.}$$

38. **Anmerk.** Dergleichen Berechnungen lassen sich auch zur See bey der Schiffahrt nutzen, wenn man erfahren will, wie viele Meilen man aus einer gewißen Höhe des Mastkorbes überblicken könne, oder wie hoch man den Mastkorb hängen müßte, um in diese, oder jene Ferne blicken zu können.

§. 39. **Aufgabe.** Eine Parabel rektificieren.

Auflösung. Da das Element jeder krummen Linie $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ ist, so suche man dieses Ausdruckes Aequivalent in der differentierten Parabelgleichung, und integriere es, und man hat die Rektifikation eines Bogens, der einer angenommenen Abscisse, oder Ordinate entspricht.

$$y^2 = px$$

diff. $$2y\,dy = p\,dx$$

quad. $$4y^2dy^2 = p^2dx^2$$

aber $$4y^2 = 4px$$

div. $$dy^2 = \frac{p\,dx^2}{4x}$$

$$+\,dx^2 \quad +\,dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{p\,dx^2}{4x} + dx^2 = dx^2\left(\frac{p}{4x} + 1\right)$$

$$= dx^2\left(\frac{p + 4x}{4x}\right)$$, und $$\sqrt{\left(dy^2 + dx^2\right)}.$$

$$= dx\sqrt{\left(\frac{p + 4x}{4x}\right)} = \frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}\sqrt{\left(p + 4x\right)}$$

Nun ziehe man nach dem binomischen Lehrsatz, aus $p + 4x$ die Quadratwurzel durch eine unendliche Reihe aus, multiplicire am Ende diese gefundene Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ und integriere sämmtliche Produkte, so hat man die verlangte Rektifika-

 tion.

tion. Es ist $(p + 4x)^{\frac{1}{2}} = p^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} p^{-\frac{1}{2}} \times 4x$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} p^{-\frac{3}{2}} \times 16x^2,$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3} p^{-\frac{5}{2}} \times 64x^3 \ldots$$

$$= p^{\frac{1}{2}} + \frac{2x}{p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^3}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$$

Die Reihe durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt.

$$= \frac{p^{\frac{1}{2}} dx}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x\,dx}{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^2 dx}{2p^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^3 dx}{2p^{\frac{5}{2}} x^{\frac{1}{2}}} \ldots$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{p^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{p^{\frac{1}{2}}},$$

$$- \frac{x^{\frac{3}{2}} dx}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{5}{2}} dx}{p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$$

$$S\sqrt{dx^2 + dy^2} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} p^{\frac{1}{2}}},$$

$$- \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2} p^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2} p^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots\ldots$$

oder $= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{2}{2}} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{1}{2}}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5p^{\frac{3}{2}}} + \frac{4x^{\frac{7}{2}}}{7p^{\frac{5}{2}}} \ldots$

§. 40. **Anmerk.** Das verdrüßlichste bey dieser Reihe ist, daß sie so langsam abnimmt: man muß also, um einen Parabelbogen mit ziemlicher Akuratesse zu bestimmen, sehr viele Glieder mühsam berechnen. Auch die Reihe, wo statt x das y beybehalten wird, ist nicht viel vortheilhafter. Sie heißt

$$y + \frac{2y^2}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9p^8} \ldots$$

Ist nun hier der Parameter klein, und die letzte Ordinate groß, so fällt die Reihe eben so langsam zusammen.

Freylich erhielte man eine schnelle konvergirende Reihe, wenn aus dem Binomium $p + 4x$ in verkehrter Ordnung, nämlich aus $4x + p$ die Wurzel ausgezogen, dann durch $\frac{dx}{2x^{\frac{1}{2}}}$ multiplicirt, und integriert würde; allein man kömmt im zweyten Gliede auf ein logarithmisches Differenzial $\frac{px^{-1}dx}{8}$, welches sich durch die gemeinen Regeln schlechterdings nicht integrieren läßt, sondern sein Integral mit Zuziehung der Subtangente der Logistik, einer gewißen krumen Linie, gesucht werden muß. Weil wir aber von dieser Linie noch nichts sagen konnten, so sind wir gezwungen diese Art von Rektifikation auf weiters zu verschieben.

§. 41. **Anmerk.** Es giebt eine Art von Parabel, in welcher $y^3 = px^2$, oder zum Unterschiede $\phi^3 = pz^2$ die sich vollkommen quadrieren läßt. Man nennt sie von dessen Erfinder W i l h e l m N e i l, einem Britten, die Neilische Parabel. Ihre Beschreibung oder Konstruktion geht so vor sich. Man zeichne erst eine Apollonische Parabel (denn so heißt der ächte Kegelschnitt im Gegensatze der neilischen Parabel) errichte auf dem Scheitelpunkt der Achse einen Perpendikel, welcher zu beyden Seiten unbestimmt verlängert werden kann, und lege in eben dem Scheitelpunkt einen rechten Winkel so an, daß ein Schenkel die Kurve berühre, oder auch schneide, das heißt, eine Sehne abgebe. Wenn nun die Ordinate des Berührungspunkts bis zu dem andern Schenkel verlängert wird, so erhält man einen Ort in der neilischen Parabel. Legt man mehr dergleichen rechte Winkel an, so bestimmen sich auch mehr Punkte, wodurch die Kurve gezogen werden muß. Es soll nun erwiesen werden, daß in dieser Linie der Kubus der Ordinate gleich ist dem Produkte des Parameters in das Quadrat der Abscisse.

S a t z. Fig. 20.

$$\phi^3 = pz^2$$

B e w e i s.

Es ist wegen rechten Winkel, worüber ein halber Zirkel geschwungen werden kann

$$qm : aq = aq : rq$$

quad. $qm^2 : aq^2 = aq^2 : rq^2$

Da nun sonst $qm = y^2 = px$
aber dießmal $x = aq = fr = \phi$ ist
so ist auch $qm^2 = p\phi$
$qr = ah = z$
und $aq = hr = \phi$
Substit. $p\phi : \phi^2 = \phi^2 : z^2$
$\phi^4 = p\phi z^2$
$:\phi$ $\phi^3 = pz^2$; was zu erweisen war. Nun zur Rektifikation.

Die Gleich. diff. $3\phi^2 d\phi = 2pzdz^2$
Quad. $9\phi^4 d\phi^2 = 4ppz^2 dz$
div. durch $\phi^3 = pz^2$

$$9\phi d\phi^2 = 4pdz^2$$

$$\frac{9\phi d\phi^2}{4p} = dz^2$$

$$dz^2 = \frac{9\phi d\phi^2}{4p}$$

$$+ d\phi^2 \qquad 4d\phi^2 +$$

$$d\phi^2 + dz^2 = d\phi^2 + \frac{9\phi d\phi^2}{4p} =$$

$$= d\phi^2\left(1 + \frac{9\phi}{4p}\right) = \sqrt{d\phi^2 + dz^2} .$$

$= d\phi\sqrt{1 + \frac{9\phi}{4p}}$; Diesen Werth des Kurvaelements durch Hilfe der Transformation integriert.

Es

Es sey demnach $\sqrt{1 + \frac{9\phi}{4p}} = v$

$$1 + \frac{9\phi}{4p} = v^2$$

$$4p + 9\phi = 4pv^2$$

$$9d\phi = 8pvdv$$

$$d\phi = \frac{8}{9}pvdv$$

mult. durch $\sqrt{\left(1 + \frac{9\phi}{4p}\right)} = v$

$$d\phi\sqrt{\left(1 + \frac{9\phi}{4p}\right)} = \frac{8}{9}pv^2dv$$

$$S\left(d\phi\sqrt{1 + \frac{9\phi}{4p}}\right) = \frac{8pv^3}{27}$$

Substit. $= \frac{8p}{27}\sqrt{\left(1 + \frac{9\phi}{4p}\right)^3}$

Weil hier beyde Funktionen, Ordinate und Absciſſe miteinander wachſen und abnehmen, ſo muß, wenn eine = o geeſetzt wird, auch die andere = o ſeyn: folglich der ganze Werth der Gleichung, bis auf die beſtändigen Größen zuſammenfallen. Man kann alſo hier die Konſtante leicht beſtimmen. Denn

$$o = \frac{8p}{27}\sqrt{1 + \frac{o \times \phi}{4p}} + c$$

$$o = \frac{8p}{27} + c$$

$$-\frac{8p}{27} = c.$$

Es iſt demnach die wahre Rektifikation der Neiliſchen Para-

bel. $\frac{8p}{27}\sqrt{1+\frac{9\Phi}{4p}}-\frac{8p}{27}$ . . .

§. 42. Aufgabe. Eine Parabel quadrieren.

Auflösung. Man suche mehrmal in der Parabelgleichung für das allgemeine Flächenelement der krummen Linie $y\,dx$ einen Werth und integriere ihn:

$$y^2 = px$$

$$\surd \qquad y = p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}$$

$$\times dx \qquad ydx = p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$Sydx = \frac{p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2p^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{px^3}$$

Der Ausdruck für die durch die Achse halbierte Parabelfläche.

§. 43. Zusatz. Wollte man lieber die Ordinate als die Abscisse in der Formel haben, so finde man in der Gleichung einen schicklichen Werth zum Substituieren;

$$y^2 = px$$

$$\frac{y^2}{p} = x$$

$$\text{Kubiert}\quad \frac{y^6}{p^3} = x^3.$$

$$\times p \qquad \frac{y^6}{p^2} = px^3$$

$$\text{Also}\quad \tfrac{2}{3}\sqrt{px^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{y^6}{p^2}} = \tfrac{2}{3}\times\frac{y^3}{p}$$

$$\text{Und}\quad q = \frac{2y^3}{3p}$$

Es

Es sey z. B. die letzte Ordinate einer Parabelfläche 12 Schuhe und der Parameter derselben 4 Schuhe, so ist $q = \frac{2 \times 12^3}{3 \times 4} = \frac{2 \times 1728}{12} = \frac{1728}{6}$ $= 288$ Quadratschuhe.

§. 44. Zusatz. Eigentlich ist dieß aber nur die halbe Parabelfläche, wovon nämlich die Achse, ein Parabelast, und nach der Sprache der Alten, eine Semiordinate, Gränzen sind. Um die Ganze zu erhalten, muß demnach, weil die Achse selbe gleich abtheilt, der Ausdruck $\frac{2y^3}{3p}$ duppliert werden;

Folglich $q = \frac{4y^3}{3p}$

§. 45. Zusatz. Soll der Parameter aus der Rechnung wegbleiben, so ist $q = \frac{4}{3}xy$; denn $p = \frac{y^2}{x}$, und dafür in der Quadraturgleichung substituiert.

Giebt $\frac{4y^3}{\frac{3 \times y^2}{x}} = \frac{4y^3x}{3y^2} = \frac{4yx}{3} = q$

§. 46. Zusatz. Wird der Parameter $= 1$ gesetzt so ist $q = \frac{4y^3}{3}$

§. 47. Lehrsatz. Das Flächenstück, welches vom Parameter abgeschnitten wird, ist genau der sechste Theil des Parameterquadrats.

Satz.

$$q = \frac{1}{6}p^2$$

Be-

Beweis.

Es ist hier $2y = p$ . . . . . .

Also $8y^3 = p^3$

$:2 \quad 4y^3 = \frac{p^3}{2}$

In $q = \frac{4y^3}{3p}$ substituirt.

giebt $q = \frac{\frac{p^3}{2}}{3p} = \frac{p^3}{6p} = \frac{p^2}{6}$

§. 48. Zusatz. Es können auch Segmente der Parabelfläche zwischen zwo rechtwinklichten Ordinaten quadriert werden, wenn diese Ordinaten sammt ihrer Entfernung gegeben werden. Denn es sey Fig. 21.

$$ac = x$$
$$ad = m$$
$$cb = y$$

und $df = Z$ so ist §. 17.

$$ac : cd = ab^2 : df^2$$

oder $x : (x + m) = y^2 : Z^2$

$$xZ^2 = y^2x + my^2$$
$$xZ^2 = y^2x + my^2$$

Vers. $xZ^2 - y^2x = my^2$

$:\left(Z^2 - y^2\right) \quad x = \frac{my^2}{Z^2 - y^2}$

Also die ganze Abscisse $\frac{my^2}{Z^2 - y^2} + m$

$$= \frac{my^2 + mZ^2 - my^2}{Z^2 - y} = \frac{mZ^2}{Z^2 - y^2}$$

Diese

Diese Abscisse nun mit vier Drittel von der entsprechenden Ordinate multipliciert, giebt

$$\frac{4Z}{3} \times \frac{mZ^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4mZ^3}{3(Z^2 - y^2)}$$ als den Inhalt der ganzen Parabelfläche.

Man bestimme endlich auch das mangelnde Stück c g a b. Es ist dasselbe

$$\frac{4y}{3} \times \frac{my^2}{Z^2 - y^2} = \frac{4my^3}{3(Z^2 - y^2)}$$

Werden nun beyde Quadraturen voneinander abgezogen, so kömmt natürlich der Flächeninhalt des Parabelsegments zum Vorschein. Daher

$$\frac{4mZ^3}{3(Z^2 - y^2)} - \frac{4my^3}{3(Z^2 - y^2)} = \frac{4m(Z^3 - y^3)}{3(Z^2 - y^2)}$$

§. 49. **Anmerk.** Statt der Entfernung der Ordinaten, oder statt einer dieser Ordinaten, kann auch der Parameter gegeben werden, ohne die Berechnung einer neuen Schwierigkeit zu unterwerfen. Es müssen auch die Ordinaten eben nicht parallel gehen, die das Flächenstück begränzen helfen.

§. 50. **Aufgabe.** Eine Paraboloide, d. i., einen durch Umwälzung einer Parabel um ihre Achse erzeugten Körper, kubieren.

Auflösung. Das Körperelement ist §. 82. $\pi y^2 dx$, wenn y die Semiordinate bezeichnet. Nun

$$y^2 = px$$

$$\times \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi p x dx$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi p x^2}{2}$$

Also

Also wenn c die Kubatur bedeutet.

$$c = \frac{\pi p x^2}{2}$$

51. Zusatz. Will man wieder, wie oben bey der Quadratur, statt der Abscisse die Ordinate in die Rechnung bringen,

so ist weil $\frac{y^2}{p} = x$

und $\frac{y^4}{p^2} = x^2$ nach geschehener

Substitution $c = \frac{\pi p y^4}{2 p^2} = \frac{\pi y^4}{2 p}$

52. Zusatz. Endlich wenn auch der Parameter aus der Formel wegfallen soll, so werde statt ihm mehrmal das Aequivalent desselben in eine der beyden obigen Kubaturgleichungen gesetzt. Weil nun

$$\frac{y^2}{x} = p$$

so ist z. B. in $c = \frac{\pi y^2}{2 p}$

nachher $c = \frac{\pi y^4}{2} : \frac{y^2}{x}$

$$= \frac{\pi y^4}{2} \times \frac{x}{y^2}$$

$$= \frac{\pi y^4 x}{2 y^2}$$

$$c = \frac{\pi y^2}{2}$$

Oder

Oder in $c = \frac{\pi p x^2}{2}$

nach der Substit. $c = \frac{\pi y^2 x^2}{2x} = \frac{\pi y^2}{2}$

Wo demnach überall der nämliche Ausdruck zum Vorschein kömmt.

§. 53. Anmerk. Wenn man die Sache analogisch mit der Quadratur betrachtet, so wird man bald begreifen, daß sich auch abgestutzte Paraboloiden, und mancherley Ausschnitte aus selben berechnen lassen, welche hier alle anzuführen, der enge Raum dieses Bändchens verbeut.

§. 54. Anmerk. Etwas zur Aufgabe. Es soll ein großer parabolischer Brennspiegel, dessen Brennweite $\frac{1}{2}$ Schuh beträgt, und wo der Durchmesser von der Oeffnung bis zum Scheitelpunkte 2 Schuh mißt, innenher vergoldet werden. Wie viel wird man Gold dazu nöthig haben, wenn nach Muschenbröcks Angabe ein Gran hinreicht, 36 $\frac{1}{2}$ Quadratzolle zu überziehen?

Auflösung. Jener Körper, der genau in diesen Brennspiegel hineinpassen würde, wäre unfehlbar eine vollkommene Paraboloide. Es ist demnach einerley, ob die Oberfläche dieser Paraboloide, oder die hohle Fläche des Brennspiegels berechnet wird, weil sie einander bedecken. Man nehme demnach die Gleichung der Parabel her, differenziere sie, und suche alsdann das Aequivalent des Oberflächenelements, dessen Integral die verlangte Fläche giebt. Nun zur Sache

$$y^2 = px$$

diff. $$2ydy = pdx$$

quad. $$4y^2dy^2 = p^2dx^2$$

div. durch $$4y^2 = 4px$$

$$dy^2 = \frac{p^2dx^2}{4py} = \frac{pdx^2}{4x}$$

add. $$dx^2 \qquad dx^2$$

$$dy^2 + dx^2 = \frac{pdx^2}{4x} + pdx^2 = \frac{pdx^2 + 4xdx^2}{4x}$$

Anders ausgedrückt. $= \frac{dx^2}{4}\left(\frac{p + 4x}{x}\right)$

$\surd \qquad \sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{dx}{2}\sqrt{\frac{p + 4x}{x}}$

$\times 2\pi y \qquad 2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = \frac{2\pi y\, dx}{2}$

$\sqrt{\frac{p + 4x}{x}} = \pi y\, dx \sqrt{\frac{p + 4x}{x}}$

Aber $\qquad y = \sqrt{px}$

Subst. $\quad 2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = \pi dx\sqrt{px}\sqrt{\frac{p + 4x}{x}}$

$= \pi dx\sqrt{\frac{(p + 4)px}{x}}$

$= \pi dx\sqrt{\frac{p^2x + 4px^2}{x}}$

$2\pi y\sqrt{dy^2 + dx^2} = \pi dx\sqrt{p^2 + 4px}$

Weil nun die zwote Seite der Gleichung integriert zu werden verlangt, so kann dieß am füglichsten durch die Transformation geleistet werden.

Es sey daher $\quad \sqrt{p^2 + 4px} = Z$

quad $\quad p^2 + 4px = Z^2$

diff. $\quad 4p\,dx = 2Z\,dZ$

$:4p \qquad dx = \frac{2Z\,dZ}{4p} = \frac{Z\,dZ}{2p}$

Aber

Aber es ist $\sqrt{p^2 + 4px} = Z$, folg. mult.

$$dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{Z^2\, dZ}{2p}.$$

$$\times\pi \qquad \pi dx\sqrt{p^2 + 4px} = \frac{\pi Z^2\, dZ}{2p}$$

$$S(\pi dx\sqrt{p^2 + 4px}) = \frac{\pi Z^3}{6p}$$

Statt Z^3 den Werth $\sqrt{(p^2 + 4px)^3}$ substituiert, oder auch, was gleich viel ist, $(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}$

$$S(\pi dx\sqrt{\text{etc.}} = \frac{\pi(p^2 + 4px)\sqrt{p^2 + 4px}}{6p}$$

$$= \tfrac{1}{6}\pi(p + 4x)\sqrt{p^2 + 4px}$$

Endlich für π, p und x ihre Werthe substituiert, giebt $\frac{1}{6} \times 3,14(2 + 4\times 2)\sqrt{2^2 + 4\times 2\times 2}$

$$\tfrac{1}{6}\times 3,14(2 + 8)\sqrt{4 + 16}$$

$$\tfrac{1}{6}\times 3,14\times 10\sqrt{20}$$

$$\frac{31,4\times 4,47}{6} = \frac{140,358}{6},$$

$= 23',39''$, oder beynahe $23\frac{2}{3}$ Quadratschuhe.

Man hat demnach keinen Gran Gold dazu nöthig; sondern nach folgender Proportion:

$$36\tfrac{2}{3} \text{ Schuh} : 3 \text{ Gren} = 23\tfrac{2}{3} \text{ Schuh} : Z$$

$$3\times 23\tfrac{2}{3} = 36\tfrac{2}{3}\, Z$$

$$70\tfrac{1}{3} = \tfrac{110}{3}\, Z$$

$$351 = \tfrac{550}{3}\, Z$$

$$1053 = 530\, Z$$

$$\tfrac{1053}{530} = Z. \text{ Also}$$

$Z = 2$ Gren beynahe.

55. An-

§. 55. Anmerk. Der Artikel von den Durchmessern der Parabel, und der übrigen Kegelschnitte ist hier geflissentweggelassen worden; theils weil die Beweise der hier einschlägigen Lehrsätze meist sehr gedehnt ausfallen, und es mir noch nicht glückte, sie beträchtlich abkürzen zu können; theils, weil dadurch die Größe dieses Bandes merklich anwachsen würde, wo zudem diese Materie von keiner gar großen Erheblichkeit zu seyn scheint. Zum Ueberflusse wollen wir doch die Erklärung davon geben. Wenn aus was immer für einem Punkte der Krümmnng eine Parallellinie mit der Achse fortgezogen wird, so heißt solch eine Linie ein Diameter der Parabel. Bey andern Kurven hat sie den nämlichen Karakter. Diese Benennung kömmt aber daher, weil sie alle Sehnen, die mit der zugehörigen Tangente parallel laufen, durchaus in zween gleiche Theile theilt.

§. 56. Aufgabe. Formeln zu finden, wodurch man in Stand gesetzt wird, eine Familie von unendlicherley Parabeln auf einmal zu rektificieren, quadriren, u. d. gl.

Auflösung. Es gehören nach §. 8. zu ein und der nämlichen Parabelfamilie $y^2 = px$, $y^3 = px^2$, $y^4 = px^3$ u. s. f. Eben so gut auch $y^3 = p^2x$, $y^4 = p^3x$ $y^5 = p^4x$ u. s. f.; folglich ist der allgemeine Ausdruck für Parabelgleichungen $y^{m+n} = p^m x^n$. Man differenziere daher diese Gleichung, und verfahre, wie gewöhnlich, so muß sie am Ende ein allgemeines Resultat geben. Erst die allgemeine Rektifikation.

$$y^{m+n} = p^n x^m$$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1} dx$

div. $dy = \dfrac{n p^m x^{n-1} dx}{(m+n) y^{m+n-1}}$

quad. $dy^2 = \dfrac{n^2 p^{2m} x^{2n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}$

$+ dx \qquad = dx^2$

dy^2

$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2} dx^2}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}$$

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2}}{(m+n)^2 y^{2m+2n-2}}}$$

Weil aber $p^m x^n = y^{m+n}$
folgl. auch $p^{2m} x^{2n} = y^{2m+2n}$
und div. durch $px = y^2$

$$p^{2m-1} x^{2n-1} = y^{2m+2n-2}$$

so kann in der zwoten Seite der Gleichung substituiert werden, und giebt

$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p^{2m} x^{2n-2}}{(m+n)^2 p^{2m-1} x^{2n-1}}}$$

$$= dx \sqrt{1 + \frac{n^2 p x^{-1}}{(m+n)^2}}$$

Da nun die Wurzel durch eine unendliche Reihe bestimmt werden muß, so wollen wir der Bequemlichkeit halber, statt $\frac{n^2 p}{(m+n)^2} = \mu$ setzen, so entsteht folgender Kalkul,

$$\sqrt{(\mu x^{-1} + 1)} = (\mu x^{-1} + 1)^{\frac{1}{2}} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times -\frac{5}{2}}{1 \times 2 \times 3} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$

$$= \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} \mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$+ \frac{5}{16} \mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} \ldots + 1$$

Endlich alle Glieder durch dx multipliciert:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \mu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} dx -$$

$$- \frac{1}{8}$$

$$- \tfrac{1}{8}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{5}{2}} dx + \tfrac{5}{16}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{7}{2}} dx.$$

$$S(\sqrt{dx^2 + dy^2}) = 2\mu^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \mu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{4}\mu^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}\mu^{-\frac{5}{2}} x^{-\frac{5}{2}} \dots x$$

Wird endlich für μ wieder sein Werth in der Berechnung selbst gesetzt, so ist die Formel für jede mögliche Parabel anwendbar.

Bey der allgemeinen Quadratur ist die Arbeit weniger mühsam.

$$y^{m+n} = p^m x^n$$

oder $y = \sqrt[m+n]{p^m x^n} = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{n}{m+n}}$

$$y\,dx = p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}} dx$$

$$S(ydx) = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m}{m+n}+1}}{\frac{m}{m+n}+1} = \frac{p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{m+m+n}{m+n}}}{\frac{m+m+n}{m+n}}$$

$$S(ydx) = \frac{(m+n)\,p^{\frac{m}{m+n}} x^{\frac{2n+m}{m+n}}}{2n+m}$$

§. 57. Zusatz. Um sich von der Richtigkeit dieser allgemeinen Formel zu überzeugen, wollen wir sie auf die Parabel der ersten Ordnung anwenden. Dort ist m = 1 und n = 1 folglich fällt der Ausdruck in diesen zusamm $\frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{3}$. Wird ferner $x^{\frac{3}{2}}$ in $x \times x^{\frac{1}{2}}$ zerfällt, so giebt es $= \frac{2p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x}{3}$, und weil $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, substituirt $+ \frac{2}{3} xy$, wie es oben gefunden worden.

§. 58. Zusatz.

§. 58. **Zusatz.** Eine gleiche Bewandniß hat es auch mit der unendlichen Kubatur, und der Oberflächenquadrierung.

§. 59. **Aufgabe.** Eine allgemeine Subtangentenformel für unendlich viele Parabeln ausfindig zu machen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

$$(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1}\, dx$$

$$\frac{(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = dx$$

xy $$\frac{(m+n)\, y^{m+n}\, dy}{n p^m x^{n-1}} = y\, dx$$

:dy $$\frac{(m+n)\, y^{m+n}}{n p^m x^{n-1}} = \frac{y\, dx}{dy} = \text{Subt. §33}$$

subst. weil $y^{m+n} = p^m x^n$

$$\frac{(m+n)\, p^m x^n}{n p^m x^{n-1}} = \text{Subt.}$$

abgek. $$\frac{(m+n)\, x}{n} = \text{Subt.}$$

§. 60. **Aufgabe.** Die Subnormal jeder Parabel allgemein zu bestimmen.

Auflösung. $y^{m+n} = p^m x^n$

diff. $(m+n)\, y^{m+n-1}\, dy = n p^m x^{n-1}\, dx$

mult. durch $y^2 = px$

$$(m+n)\, y^{m+n+1}\, dy = n p^{m+1} x^n\, dx$$

div. durch $(m+n)\, y^{m+n} = (m+n)\, p^m x^n$

$$y\, dy = \frac{n p\, dx}{m+n}$$

$$: dn \quad \frac{y\,dy}{dx} = \frac{np}{m+n}$$

$$\text{alſo} \quad \text{Subnorm.} = \frac{np}{m+n}$$

§. 61. **Anmerk.** Auf eine nicht viel unähnliche Art erhält man auch allgemeine Ausdrücke für Tangenten und Normalen unendlicher Parabeln, welche wir Kürze halber hier weglassen wollen. Noch am Ende dieses Kegelschnitts muß angemerkt werden, daß die Theorie desselben vorzüglich gute Dienste in der Artillerie leistet, da, wie aus der Physik bekannt ist, jeder Körper, der nicht perpendikulär geworfen wird, also auch Bomben, eine Parabel beschreiben.

Von der Ellipse.

§. 62. **Erklär.** In jeder Ellipse können zweyerley Achsen gezogen werden: jene welche die Kurve der Länge nach in zween gleiche Theile theilt, heißt die größere Achse, oder schlechtweg die Achse, und wird durch a ausgedrückt. Die andere, welche das nämliche nach der Breite leistet, folglich auch die größere Achse selbst halbiert, wird die kleine Achse, oder Querachse genennt; wir wollen sie künftig c heißen. Die obige Definition des Parameters bleibt auch hier und in der Hyperbel, so wie bey der Parabel.

§. 63. **Lehrsatz.** Ueberall ist in diesem Kegelschnitte das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus dem Parameter in die Segmente der großen Achse, durch eben diese Achse dividiert.

Satz

$$y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man lege durch jenen Theil des Kegels, aus welchem die Ellipse geschnitten worden, irgendwo eine Zirkelfläche parallel mit der Basis, so wird eine gemeinschaftliche Ordinate des Zirkels und der Ellipse auf einem gemeinschaftlichen Punkt der zwoen Axen perpendikulär stehen. Es ist demnach Fig. 22

$$pm^2 = ap \times ph$$

oder $$y^2 = ap \times ph$$

Wenn nun oben und unten an den Scheitelpunkten der Ellipse Linien parallel mit der Basis durch den Kegel gezogen werden, so lassen sich Aequivalente für ap und ph bestimmen. Denn wegen dem Parallelschnitt ph ist nach §. 143 Geom. in dem Dreyecke bck

$$bp : ph = bc : ck$$

oder $$x : ph = a : ck$$

$$ph = \frac{x \times ck}{a}$$

Eben so in dem Δ cdb

$$cp : ap = cb : db$$

oder $$a-x : ap = a : db$$

$$ap = \frac{(a-x) \times db}{a}$$

Nun in der erstern Gleichung substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{(a-x) \times db}{a} \times \frac{x \times ck.}{a}$$ Anders geord.

$$y^2 = \frac{db \times ck}{a} \times \frac{x\,(a-x)}{a}$$

Weil aber der Quotus $\frac{db \times ck}{a}$ aus lauter be-

ständigen Größen zusammgesetzt ist, folglich selbst beständig seyn muß, so ist dieß der Parameter der Ellipse, und kann wieder überhaupt dafür in der Gleichung p substituiert werden.

Also ist $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$

§. 64. Zusatz. Diese Gleichung für die Ellipse $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$ läßt sich, wenn man wirklich multipliciert, und das erste Glied dividiert, auch so ausdrücken: $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$. Daher kömmt nun der Name Ellipse, welches Wort, wie wir schon oben erinnerten, einen Mangel bezeichnet; weil nämlich hier die Ordinate dem Produkt aus den Parameter in die Abscisse nicht völlig gleich ist, wie in der Parabel, wo $y^2 = px$ war, sondern von selbem die Größe $\frac{px^2}{a}$ abgezogen werden muß.

§. 65. Anmerk. Es lassen sich aber eben so gut aus Walzen, als aus Kegeln, Ellipsen ausschneiden. Der Beweis hievon ist eben nicht schwer. Man ziehe Fig. 23 alle hieher gehörigen Linien, wie vorher beym Kegel; so ist erstens

$pm^2 = fp \times ph$

oder $y^2 = fp \times ph$. Für pf und ph nun auf gleiche Art ihre Werthe bestimmt.

$gp : fp = ga : ak$

weil aber $gp = x$

$ga = a$

und $ak = fh = gd =$ diam.

oder schlechtweg $= d$.

substit. $x : fp = a : d$

$fp = \frac{xd}{a}$

Weil

Weil nun das zweyte Segment

$$ph = fh - fp \text{ und nach der Substit.}$$

$$ph = d - \frac{xd}{a}$$

so wird $$ph = \frac{ad - xd}{a}$$

und $$ph = (a-x)\frac{d}{a}$$

Endlich in der Hauptgleichung statt fp und ph ihre eben gefundnen Werthe gesetzt; giebt

$$y^2 = \frac{xd}{a} \times (a-x)\frac{d}{a}.$$

Anders geordnet; $y^2 = \frac{d^2}{a} x \frac{(a-x)}{a}$

Wird für d^2, als einer beständigen Größe, p gesetzt, so kömmt die eigenthümliche Gleichung der Ellipse zum Vorschein, $y^2 = \frac{px\,(a-x)}{a}$, welche um gar nichts von der Kegelellipse unterschieden ist, als um den größern Parameter, vorausgesetzt daß ihre Achse gleiche Länge mit jener habe; weil der Walzendurchmesser doch größer seyn muß, als die Parallelschnitte des Kegels, welche dort das Dividendum des Parameters geben.

§. 66. Zusatz. In jeder Ellipse verhalten sich demnach die Quadrate der Ordinaten, wie die Produkte aus den entsprechenden Segmenten der Achse. Es heiße eine Ordinate y, die zugehörigen Segmente x und a — x, die andere Ordinate Y, und ihre Segmenten X und a — X, so gilt die Proportion

$$y^2 : Y^2 = a\,(a-x) : X\,(a-X)$$

Beweis.

Beweis.

In jedem Ellipsenpunkt ist

$$y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$$

folglich auch $Y^2 = \frac{pX(a-X)}{a}$

$$y^2 : Y^2 = \frac{px(a-x)}{a} : \frac{pX(a-X)}{a} \quad aX$$

$$= px(a-x) : pX(a-X)$$

$$y^2 : Y^2 = x(a-x) : X(a-X) \quad :p$$

§. 67. Zusatz. Auch in der Ellipse giebt es zu beyden Seiten der Achse Ordinaten; weil hier gleichfalls $y = \pm\sqrt{\frac{px(a-x)}{a}}$

§. 68. Zusatz. Die Ellipse ist eine in sich selbst zurückkehrende Linie, wie dieß neben der Natur des Kegelschnitts selbst auch aus der Gleichung gezeigt werden kann. Denn setze man erstens

$x = 0$, so ist

$$y^2 = \frac{p0 \times (a-0)}{a}$$

$$y^2 = 0$$

$$y = 0$$

Also fangen die Ordinaten mit den Abscissen an: setzt man zweytens $x = a$, d. i. wird die Abscisse zur Achse, so erscheint die Gleichung

$$y^2 = \frac{pa(a-a)}{a}$$

$$y^2 = pa \times 0$$

$y^2 = 0$

$y = 0$; und man sieht, daß die Ordinaten wieder aufhören, wenn die Abscisse an Größe der Achse gleicht, oder mit andern Worten, daß die Kurve auf den Endpunkten der Achse aufliege. Da nun dieß auf beyden Seiten der Achse wahr ist, so hat es auch aus der Gleichung seine Richtigkeit, daß die Ellipse in sich zurückkehre.

§. 69. Zusatz. Die Ellipse ist von der Parabel blos an der Achsenlänge unterschieden; denn ist diese unendlich, so wird sie zur Parabel. Es ist alsdann $y^2 = \frac{px(\infty - x)}{\infty}$

$$y^2 = \frac{px\,\infty}{\infty}$$

$: \infty \qquad y^2 = px$

§. 70. Anmerk. Dieser Satz kömmt der Astronomie bey Berechnung der Kometenperioden sehr gut zu statten, indem die Laufbahnen dieser Gattung von Irrsternen unermeßlich lange Ellipsen sind.

§. 71. Lehrsatz. Die größte Ordinate erhält man auf dem Mittelpunkt der Achse, oder wenn die Abscisse der halben Achse gleicht.

Voraussetzung.

y = Maximo.

Satz

$x = \frac{1}{2}a$

Beweis.

$$y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$$

$\times a$ $\quad ay^2 = px(a-x) = apx - px^2$

diff. $\quad 2ay\,dy = ap\,dx - 2px\,dx$

$:2ay$ $\quad dy = \frac{ap\,dx - 2px\,dx}{2ay}$

$:dx$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{ap - 2px}{2ay}$

oder $\quad o = \frac{ap - 2px}{2ay}$

$\times 2ay$ $\quad o = ap - 2px$

$$2px = ap$$

$:p$ $\quad 2x = a$

$:2$ $\quad x = \frac{1}{2}a$

§. 72. **Lehrsatz.** Die Querachse ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt der großen Achse und des Parameters.

Satz.

$$c = \sqrt{ap}$$

Beweis.

In jedem Punkte der Ellipse ist

$$y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$$

aber in diesen Fall $\quad y = \frac{c}{2}$

und $\quad y^2 = \frac{c^2}{4}$

auch ist $\quad x = \frac{a}{2}$

Sub-

Substit. $\frac{c^2}{4} = \frac{p\,\frac{a}{2}\,(a - \frac{a}{2})}{a}$

$$\frac{c^2}{4} = \frac{p \times \frac{a}{2}}{2}$$

abgek. $\frac{c^2}{4} = \frac{ap}{4}$

$$c^2 = ap$$

$$c = \sqrt{ap}$$

§. 73. Zusatz. Man findet aus diesem Ausdrucke auch Aequivalente für a und p; denn es ist $a = \frac{c^2}{p}$ und $p = \frac{c^2}{a}$, welche wir vielleicht bald zu Substitutionen gebrauchen können.

§. 74. Zusatz. Der Parameter ist demnach die dritte Proportionallinie zur großen und kleinen Achse; denn

$$c = \sqrt{ap}$$

$c^2 = ap$ und in eine Proportion zerstreut, $a : c = c : p$

§. 75. Aufgabe. Den Parameter in der Ellipse durch Zeichnung sichtbar zu machen.

Auflösung. Man halbiere die größere Achse, beschreibe auf den Mittelpunkt derselben die größte Ordinate, d. i. die halbe kleinere Achse, verbinde die beyden Endpunkte mit einer Sehne, und errichte von der kleinern aus, auf den Endpunkt dieser Sehne einen Perpendikel, so wird das Stück der großen Achse zwischen diesem Perpendikel und der kleinen Achse den halben Parameter vorstellen, welcher sich leicht durch Hilfe eines Zirkelinstruments nochmal

auf der großen Achse umschlagen läßt, um den ganzen Parameter zu Gesicht zu bekommen.

Satz Fig. 24

$2\,dg$, oder $dh = p$

Beweis.

Weil das Dreyeck abg aus der Bedingung der Konstruktion rechtwinklicht ist, so läßt sich ein halber Zirkel darüber werfen, wovon ag den Diameter giebt. Nun ist wegen dem Perpendikel bd

$$ad : bd = bd : dg$$

subst. $\frac{a}{2} : \frac{c}{2} = \frac{c}{2} : dg$

×2 $a : c = c : 2\,dg$

$c^2 = a \times 2\,dg$

aber $c^2 = ap$ §. 72

$a \times 2\,dg = ap$

$2\,dg = p$

oder $dh = p$

§. 76. Anmerk. Man vergleiche diese meine Verzeichnung des Parameters mit Hildebrands seiner, und urtheile dann, welche natürlicher, einfacher und kürzer ist.

§. 77. Aufgabe. Die Brennpunkte in der Ellipse durch Zeichnung zu bestimmen.

Auflösung. Man beschreibe zuerst auf obige Weise den halben Parameter, trage ihn rechtwinklicht auf beyde Endpunkte der großen Achse, und lege eine Linie darüber, die wegen ihrer gleichen Entfernung von der Achse mit ihr nothwendig parallel laufen muß. Wo nun diese Parallellinie die

Kurve

Kurve schneidet, da fälle man Perpendikel oder Ordinaten auf die große Achse hin, so werden dieselben auf den Brennpunkten stehen.

Beweis. Fig. 25.

Aus der Definition des Brennpunkts ist derselbe in jedem der drey Kegelschnitte da, wo die Ordinate zum halben Parameter wird. Weil nun wegen Parallelismus $ab = cf$ und $gh = dF$, so haben diese Ordinaten den halben Parameter zum Maase; folglich müssen sie auf den Brennpunkten f und F stehen.

§. 78. **Lehrsatz.** Wenn statt der großen Achse die kleine in die Rechnung gebracht wird, so heißt die Gleichung für die Ellipse

$$y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

Beweis.

$$y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$$

$$ay^2 = px(a-x) = apx - px^2$$

$$-apx = -apx$$

$$ay^2 - apx = -px^2$$

durch $y^2 - px = y^2 - px$ div.

$$a = \frac{-px^2}{y^2 - px} = \frac{px^2}{px - y^2}$$

aber $a = \frac{c^2}{p}$ §. 73.

$$\frac{c^2}{p} = \frac{px^2}{px - y^2}$$

px

$$\times p \qquad c^2 = \frac{p^2 x^2}{p x - y^2}$$

$$\times (p x - y^2) \qquad c^2 p x - c^2 y^2 = p^2 x^2$$

$$- c^2 y^2 = p^2 x^2 - c^2 p x$$

$$(: - c)^2 \qquad y^2 = \frac{p^2 x^2 - c^2 p x}{- c^2}$$

oder $$y^2 = \frac{c^2 p x - p^2 x^2}{c^2}$$

$$y^2 = p x - \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

§. 79. **Lehrsatz.** Die Gleichung für die Ellipse heißt ohne Beyziehung des Parameters

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

Beweis.

Es ist $p = \frac{c^2}{a}$

und $p^2 = \frac{c^4}{a^2}$. Diese Werthe in der Gleichung $y^2 = p x - \frac{p^2 x^2}{c^2}$ substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^4 x^2}{c^2 a^2} = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

§. 80. **Lehrsatz.** Wenn die Abscissen vom Mittelpunkte angerechnet, und v genennt werden, so ist die Gleichung mit Beyziehung der großen Achse und des Parameters

$$y^2 = \tfrac{1}{4} a p - \frac{p v^2}{a} = p \left(\tfrac{1}{4} a - \frac{v^2}{a}\right)$$

Beweis.

Beweis. Fig. 29.

$$pd = ad - ap$$

oder $v = \frac{a}{2} - x$

und daher $x = \frac{a}{2} - v$. Dieß nun in der ersten Gleichung $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$ für x substituiert, so kömmt zum Vorschein

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2} - v\right)\left(a - \frac{a}{2} + v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a}{2} - v\right)\left(\frac{a}{2} + v\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{p\left(\frac{a^2}{4} - v^2\right)}{a} \text{ oder} = \frac{pa^2}{4a} - \frac{pv^2}{a}$$

$$y^2 = p\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

§. 81. Zusatz. Bringt man statt p oder a mehrmal ihre Aequivalente in die Rechnung, so erhält man im ersten Falle

$$y^2 = \frac{c^2}{a}\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \frac{c^2a}{4a} - \frac{c^2v^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2v^2}{a^2}$$

Im zweyten Falle $y^2 = p\left(\frac{c^2}{4p} - \frac{v^2}{c^2 : p}\right)$

$$y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{p^2v^2}{c^2}$$

§. 82. **Anmerk.** Um die bisher gefundenen 6 Ellipsengleichungen mit einemmal überblicken zu können, wollen wir sie der Ordnung nach, wie sie erhalten worden sind, hieher setzen.

1) $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$

2) $y^2 = px - \frac{p^2 x^2}{c^2}$

3) $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$

4) $y^2 = \frac{1}{4} ap - \frac{pv^2}{a}$

5) $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

6) $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{p^2 v^2}{c^2}$

§. 83. **Lehrsatz.** Alle diese 6 Ellipsengleichungen lassen sich in Zirkelgleichungen umschaffen, wenn man entweders $p = a$ oder $c = a$, oder endlich $p = c = a$ setzt.

Beweis.

Denn es heißt die ursprüngliche erste Aequation vor der Substitution $y^2 = \frac{px(a-x)}{a}$; darnach aber $y^2 = \frac{ax(a-x)}{a} = x(a-x) = ax - x^2$.

Die zwote $y^2 = px - \frac{p^2 x}{c^2}$ geht in diese über: $y^2 = ax - \frac{a^2 x}{a^2} = a - x^2$

Die

Die dritte $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ nimmt folgende Gestalt an: $y^2 = \frac{a^2 x}{a} - \frac{a^2 x^2}{a^2}$

und abgek. $y^2 = ax - x^2$

Die vierte $y^2 = p\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$ giebt

$$y^2 = a\left(\frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}\right)$$

$$y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a v^2}{a}$$

$y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ Eine Zirkelgleichung, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden, und a die ganze Achse bedeutet. Denn soll der Radius oder $\frac{a}{2} = 1$ gelten, folglich $a = 2$, und wenn x gerade das, was v bedeutet, ausdrückt, so kömmt die obige Gleichung §. 73, diff. $y^2 = 1 - x^2$ zum Vorschein.

Eben so verhält sichs bey der sechsten Gleichung $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$, woraus mehrmal die nämliche Aequation $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 v^2}{a^2}$

oder abgek. $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - v^2$ d. i. $= 1 - x^2$ entspringt.

§. 84. **Zusatz.** Daraus erhellet, daß der Zirkel eigentlich nichts anders sey, als eine Gattung von Ellipsen, wo der Parameter, kleine und große Achse einander vollkommen gleich sind.

§. 85. **Anmerk.** Ueberhaupt darf in jeder Ellipsengleichung nur statt a, c und p eine geometrische Mittelgröße zwoer dieser Linien, zum Beyspiel $\sqrt{ac}$, $\sqrt{ap}$ oder $\sqrt{cp}$

$\frac{1}{a^2}$

$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}}$ u. s. f. substituiert und diese beständige Größe am Ende mit Einem Buchstaben, als etwa mit a bezeichnet werden, so entsteht allemal eine Zirkelgleichung. Nehmen wir unter andern die erste ursprüngliche $y^2 = \frac{p x (a-x)}{a}$ her, so giebt dieß nach der Substitution

$$y^2 = \frac{a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)}{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}$$

$$y^2 = x \left(a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - x\right)$$

oder $y^2 = x (a - x)$

$$y^2 = a x - x^2$$

Es wird sogar auch weiter unten erwiesen werden, daß der Flächeninhalt jeder Ellipse der Fläche eines Zirkels gleiche, der zur Achse die mittlere Proportionallinie zwischen beyden Ellipsenachsen oder andern zwo berührten Linien hat.

§. 86. **Lehrsatz.** Auch können die Ordinaten um noch mehrere Gleichungen zu gewinnen, auf der kleinen Achse genommen werden. Es tritt hier, wenn z die Abscisse vom Mittelpunkte und φ die Ordinate bedeutet, die Gleichung ein

$$\phi^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$$

Beweis. Fig. 26.

Es ist hier $d b = \phi$

und $b c = z$ vom Mittelpunkte.

Da nun erwiesen worden, daß sonst

$$y^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} \text{ war,}$$

aber

aber in unserm Fall nach gezogener Parallelinie d g

$$y = dg = bc = z$$

und $v = gc = db = \Phi$ ist;

so läßt sich substituieren. Folglich

$$z^2 = \tfrac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 \Phi^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $$a^2 z^2 = \tfrac{1}{4} c^2 a^2 - c^2 \Phi^2$$

$$c^2 \Phi^2 = \tfrac{1}{4} c^2 a^2 - a^2 z^2$$

$: c^2$ $$\Phi^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$$

§. 87. Zusatz. Es leuchtet von selbst ein, daß man auch auf diesem Wege wieder sechserley Gleichungen erobern könnte. Die Verfahrungsart ist die nämliche, wie oben, und die Gleichungen fallen sehr ähnlich mit den erstern aus.

§. 88. Anmerk. Ein Liebhaber von der Methode, alle Sätze in Proportionen einzukleiden, findet in den obigen 6 Gleichungen, so wie in diesen, ein weites fruchtbares Feld. So z. B. fließt aus der dritten Gleichung die bekannte Proportion: Das Quadrat der halben kleinen Achse verhält sich zum Quadrat der halben größern Achse; wie das Quadrat jeder Ordinate zum Produkte aus den Segmenten der großen Achse. Denn

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$\times a^2$ $$a^2 y^2 = c^2 a x - c^2 x^2$$

$: c^2$ $$\frac{a^2 y^2}{c^2} = a x - x^2 = x (a - x)$$

aufgelöset $$c^2 : a^2 = y^2 : x (a - x$$

$: 2$ $$\frac{c^2}{2} : \frac{a^2}{2} = y^2 : x (a - x)$$

§. 89. Lehrsatz. Die Entfernung des Brennpunkts in der Ellipse vom Scheitel ist gleich der

 hal-

halben großen Achse mehr oder weniger der halben Quadratwurzel aus dem Produkte dieser Achse in die Differenz zwischen der nämlichen Achse und dem Parameter.

Satz 3.

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - p)}$$

Beweis.

Es ist überall $y^2 = \frac{p x (a - x)}{a}$

Allein hier $y = \tfrac{1}{2} p$

also $y^2 = \tfrac{1}{4} p^2$

Folgl. $\tfrac{1}{4} p^2 = \frac{p x (a - x)}{a}$

$:p$ $\tfrac{1}{4} p = \frac{x (a - x)}{a}$

$\times a$ $\frac{a p}{4} = a x - x^2$

$$x^2 - a x = - \frac{a p}{4}$$

kompl. $+ \tfrac{1}{4} a^2 \quad + \frac{a^2}{4}$

$$x^2 - a x + \tfrac{1}{4} a^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a p}{4} = \frac{a (a - p)}{4}$$

$\sqrt{\ }$ $x - \tfrac{1}{2} a = \pm \frac{\sqrt{a (a - p}}{2}$

$+ \tfrac{1}{2} a \quad + \tfrac{1}{2} a$

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - p)}$$

§. 90.

§. 90. Zusatz. In jeder Ellipse finden sich daher zween Brennpunkte vor, deren einer $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$ und der andere $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 91. Erkl. Die Entfernung der zween Brennpunkte selbst von einander heißt die Exzentrizität der Ellipse. Sie wird von der kleinen Achse ebenfalls in zween gleiche Theile getheilt; weil sie die große Achse ist, weniger der beyderseitigen Fokallänge.

§. 92. Zusatz. Wenn die halbe Exzentrizität von der ersten halben großen Achse abgezogen wird, so überkömmt man auch den ersten Brennpunkt: wird selbe hingegen zu der ersten halben Achse addiert, so wird der zweyte gefunden. Dieß geschieht aber in dem Ausdrucke $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{a(a-p)}$. Folglich ist $\sqrt{a(a-p)}$ die ganze Exzentrizität der Ellipse.

§. 93. Zusatz. Diese Exzentrizität läßt sich aus jeder Gleichung unmittelbar finden, in welcher die Abscissen vom Mittelpunkte genommen sind; weil sie zur Parameterordinate als Abscisse gehört. Denn es sey

$$y^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$$

Weil nun $y = \frac{1}{2}p$

und $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

Folglich $\frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}ap - \frac{pv^2}{a}$

$:p \quad \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}a - \frac{v^2}{a}$

vers. $\frac{v^2}{a} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}p = \frac{1}{4}(a-p)$

$\times a \quad v^2 = \frac{1}{4}(a^2 - ap) = \frac{1}{4}a(a-p)$

$\sqrt{\ } \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{a(a-p)}$

§. 94. Zusatz. Wünschte man lieber, die halbe oder ganze Exzentrizität in Achsenwerthen zu haben, so darf nur statt p dessen Aequivalent $\frac{c^2}{a}$ substituiert werden. Es ist daher nach der

Substitution $v = \frac{1}{2}\sqrt{a\left(a - \frac{c^2}{a}\right)}$ und

$v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$, und die ganze Exzentrizität $= \sqrt{a^2 - c^2}$. Ein Ausdruck, der noch simpler als der obige ausfällt, und sich deutlicher durch Worte vortragen läßt. Es ist nämlich die ganze Exzentrizität die Wurzel aus der Differenz der beyden Achsenquadraten.

§. 95. Zusatz. Der nämliche Ausdruck entwickelt sich auch unmittelbar sogleich aus der 5ten Ellipsengleichung, wenn statt y der halbe Parameter und statt diesen endlich das halbe Aequivalent aus den Achsen $\frac{c^2}{2a}$ zu stehen kömmt.

Es ist diesemnach $\frac{p}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

oder $\frac{c^2}{2a} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}}$

quad. $\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$: c^2$ $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2$ $\frac{c^2}{4} = \frac{1}{4}a^2 - v^2$

vers. $v^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$

$\sqrt{}$ $v = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$

§. 96.

§. 96. Lehrsatz. Das Produkt der Brennweite in den übrigen Theil der großen Achse ist gleich dem vierten Theil der quadrierten kleinen Achse: oder, die halbe Querachse ist die mittlere Proportionallinie zwischen der Fokallänge und dem übrigen Reste der Hauptachse.

Satz

$x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$ oder ⎫ wo x die Brennweite
$x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$ ⎭ bedeutet.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{r} x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2} \\ a-x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2-c^2} \end{array}\right\} \text{§. 94.}$$

mult. $x(a-x) = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} + \frac{1}{4}\sqrt{a^2-c^2} - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

abgek. $x(a-x) = \frac{1}{4}c^2$

oder $x : \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c : (a-x)$

§. 97. Zusatz. Der Lehrsatz könnte auch so eingekleidet werden: Wenn über die Hauptachse einer Ellipse ein halber Zirkel beschrieben wird, so muß die Zirkelordinate auf dem Brennpunkte der halben Querachse der Ellipse gleich seyn.

§. 98. Zusatz. Wenn also neben der großen Achse auch die Brennweite gegeben wird, so läßt sich die kleine Achse leicht bestimmen. Es darf nur über die Hauptachse ein Zirkel geschwungen, und auf dem Brennpunkt ein Perpendikel bis an die Peripherie errichtet werden, so muß dieß die halbe Querachse seyn.

§. 99. **Zusatz.** Endlich könnte man auch den Werth der Exzentrizität in Ausdrücken der kleinen Achse und des Parameters bestimmen: Da aber die Verfahrungsart beynahe immer die nämliche bleibt, so wollen wir das dem forschenden Fleiße der Anfänger überlassen. Es ist indessen hier $v = \frac{1}{2} c \sqrt{\frac{c^2}{p} - 1}$

§. 100. **Lehrsatz.** Bildet man sich auf der kleinen Achse die Brennpunkte ein, so ist die halbe Excentricität daselbst, die kleine Achse multipliciert mit der Wurzel aus dem Produkte der Summe und Differenz der quadrierten beyden Achsen, alles durch die doppelte quadrierte große Achse dividiert.

Satz.

$$z = c \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)(a^2 - c^2)}}{2 a^2} \text{ oder}$$

$$z = \frac{c}{2 a^2} \sqrt{a^4 - c^4}$$

Beweis.

Es ist hier $\phi^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

aber $\phi = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2 a}$

quad. $\phi^2 = \frac{c^4}{4 a^2}$

Folgl. $\frac{c^4}{4 a^2} = \frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$

$\times c^2$

$$\times c^2 \quad \frac{c^6}{4a^2} = \frac{1}{4}a^2c^2 - a^2z^2$$

$$:a^2 \quad \frac{c^6}{4a^4} = \frac{1}{4}c^2 - z^2$$

$$\text{verſ. } z^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^6}{4a^4} = \frac{c^2a^4 - c^6}{4a^4} = \frac{c^2(a^4 - c^4)}{4a^4}$$

$$\surd \quad z = \frac{c\sqrt{a^4 - c^4}}{2a^2} = \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^4 - c^4}$$

§. 101. **Zuſatz.** Wenn die zwey Achſen einander gleich geſetzt werden, ſo verſchwinden die Exzentrizitäten auf beyden Achſen; weil $a^2 - c^2$ oder $a^4 - c^4 = 0$ werden. Es läßt ſich alſo wieder behaupten, daß der Zirkel eine Ellipſe ohne Exzentrizität ſey.

§. 102. **Erkl.** Verbindet man die vier Brennpunkte der Ellipſe durch gerade Linien, ſo entſteht ein eingeſchloßner Raum, welcher das Parallelogram der Exzentrizität heißen kann, und wodurch ſich die Ellipſe an Quadratinhalt von dem Zirkel unterſcheidet; weil dieſer Raum nothwendig verſchwinden muß, wenn die beyden Achſen gleiche Größen bekommen.

§. 103. **Lehrſatz.** Das Parallelogram der Exzentrizität läßt ſich beſtimmen: es iſt, wenn der Quadratinhalt durch q bezeichnet wird, der

Satz. Fig. 27

$$q = \left(\frac{1}{2}c - \frac{c^3}{2a^2}\right)\sqrt{a^2 + c^2}$$

Beweis.

Beweis.

Das $\Delta\ fgF = \frac{fF}{2} \times gc$;

aber $\frac{fF}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}$ als halbe Exzent.

und $gc = \frac{c\sqrt{(a^2+c^2)(a^2-c^2)}}{2a^2}$

mult. $\frac{fF}{2} \times gc = \Delta\ fgF = \frac{c}{4a^2}\sqrt{(a^2+c^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}\sqrt{(a^2-c^2)}$

$$\Delta\ fgF = \frac{c}{4a^2}(a^2-c^2)\sqrt{(a^2+c^2)}$$

$$\Delta\ fgF = \frac{a^2c - c^3}{4a^2}\sqrt{a^2+c^2)}$$

$\times 2 \quad 2\Delta\ fgF = q = \frac{a^2c - c^3}{2a^2}\sqrt{(a^2+c^2)}$

abgek. $\quad q = \left(\frac{1}{2}c - \frac{c^3}{2a^2}\right)\sqrt{(a^2+c^2)}$

§. 104. **Lehrsatz.** Der Brennstrahl, von der großen Achse aus, an den Endpunkt der kleinen Achse hingezogen, ist allemal gleich der halben großen Achse.

Satz. Fig. 28.

$$fc = \frac{1}{2}a$$

Beweis.

$$fc^2 = cb^2 + fb^2$$

Weil aber cb nichts anders als die halbe kleine Achse, und fb die halbe Exzentrizität ist, so kann substituiert werden;

fc²

$$fc^2 = \frac{1}{4}c^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2}\right)^2$$

$$fc^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$$

abgek. $fc^2 = \frac{1}{4}a^2$

$\sqrt{\ }$ $fc = \frac{1}{2}a$

§. 105. Zusatz. Daraus folgt eine sehr leichte Art, aus den beyden Achsen die Brennweiten zu bestimmen. Man darf nur durch Hilfe des Handzirkels mit der Oefnung der halben großen Achse aus dem einen Endpunkte der kleinen die große Achse beyderseits durchschneiden, so sind die Brennpunkte sichtbar gemacht.

§. 106. Anmerk. Herr Prof. Tanzer macht in seinem Lehrbuche IIter Theil §. 118 aus diesem Lehrsatze eine Erklärung des Brennpunkts, ohne ihn selbst vorauszuschicken. Allein es ist durchaus bekannt, daß in den dreyen Kegelschnitten da überall der Brennpunkt sey, wo der halbe Parameter die Ordinate abgiebt; folglich erwartet hier der Anfänger sehr billig eine Rechtfertigung dieser zweyten Definition; um zu zeigen, daß selbe in Rücksicht der ersten keinen Widerspruch in sich fasse.

§. 107. Lehrsatz. Was immer für zween entgegengesetzte Brennstrahlen, die an der Kurve einen Winkel bilden, sind zusammgenommen der großen Achse gleich.

Satz. Fig. 29.

$$fm + Fm = a$$

Beweis.

I $fm^2 = fp^2 + mp^2$

Da nun $fp = fd - pd$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} - v$

und $fp^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$

Fer-

Ferner $mp^2 = y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$ Folgl.

subſtit. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

II $Fm^2 = pF^2 + mp^2$

Da hier $pF = dF + pd$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - c^2} + v$

ſo iſt auch $pF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2$

Subſtit. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

abgek. $Fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 - c^2} + v^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $Fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

oben war $fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$

---

add. $fm + Fm = a$

§. 108. **Anmerk.** Wie ſich bey den beyden Wurzelausziehungen am Ende allemal das $v^2 - \frac{c^2 v^2}{a}$ aufhub, wird der Anfänger daraus leicht begreifen: weil auch das Quadrat des zweyten Theils abgezogen werden muß. Nun iſt der zweyte Theil hier unfehlbar $\frac{v}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$; folglich macht

macht dessen Quadrat $\frac{v^2}{a^2}(a^2 - c^2) = \frac{v^2 a^2}{a^2} - \frac{v^2 c^2}{a^2}$ $= v^2 - \frac{v^2 c^2}{a^2}$. Werden nun die Zeichen verändert und addiert, so hebt sich alles auf. Da bey der Hyperbel eine ähnliche Rechnung vorkömmt, so soll diese Anmerkung auch dorthin gelten.

§. 109. **Aufgabe.** Eine Ellipse nach geometrischen Gründen zu zeichnen.

Auflösung. Man ziehe die große Achse, bestimme nach Willkühr die Brennpunkte darauf, doch so, daß die Fokallängen beyderseits gleich bleiben, und zerstücke diese Achse in was immer für zween Theile. Zum Beyspiel Fig. 30 in ac und cb, so wird, wenn man mit der Zirkelöfnung jeder dieser Segmentenweiten aus den Brennpunkten Bögendurchschnitte macht, wie hier in h, der Durchschnittspunkt in der Ellipsenlinie liegen. Geschieht die Zerstückung in ad und db, so trift der Durchschnittspunkt in k u. s. w. Je mehr nun dergleichen Punkte mittels verschiedner Zerstückung der Achse genommen werden, desto genauer läßt sich auch die Ellipse durch diese Punkte ziehen.

Beweis. Die Brennstrahlen hf und hF, so auch kf und kF, sind der Konstruktion gemäß der großen Achse gleich. Diese Eigenschaft kömmt aber ausschlüßungsweise der Ellipse zu. Folglich ist jede Linie auf solche Art beschrieben, eine Ellipse.

§. 111. **Anmerk.** Die gewöhnliche mechanische Art, eine Ellipse zu zeichnen, geschieht durch Hilfe zweener Stifte, die in die Brennpunkte eingeschlagen werden, und einer Schnur, deren beyde Ende man an diese Stifte anknüpft. Es muß aber die Schnur etwas länger seyn als die Exzentrizität, je nachdem nämlich die Gestalt der Ellipse ausfallen soll, weil

im widrigen Falle durch die Anstrengung der Schnur keine Brennstrahlen entstehen würden, welche, wenn sie herumgeführt werden, die Ellipse geben. Der Beweis, daß diese beyden Brennstrahlen der großen Achse gleich sind, ist leicht: denn man darf nur bedenken, daß die Länge der Achse aus der doppelten Fokallänge und der ganzen Excentricität besteht; nun aber, wenn die Schnur in eine solche Lage gebracht wird, daß die Brennstrahlen keinen Winkel mehr machen, so wird das doppelte Maas der Brennweite und die ganze Exzentrizität an der Schnur sichtbar werden, folglich ist die Sache richtig.

§. 112. **Aufgabe. Auf jeden Punkt der Ellipse eine Tangente hinzuziehen.**

Auflösung. Man ziehe auf dem gegebnen Punkt die beyden entsprechenden Brennstrahlen zusammen, z. B. Fig. 31, wenn x der gegebne Punkt ist, fm und Fm; verlängere einen derselben von aussen um die Größe des andern in gerader Richtung, (am bequemsten ist es, man setzet den kleinern Brennstrahl an den größern) wie hier dm = mf wird, und theile den durch die Verlängerung entstandnen Aussenwinkel in zween gleiche Theile, so ist diese Theilungslinie die Tangente des gegebnen Punktes.

Beweis. Richtig ist es, daß der gegebne Punkt der Ellipse in der Theilungslinie liege; weil sie durch den Winkelpunkt o der mit x einen gemeinschaftlichen Scheitel hat, der Bedingung gemäß gezogen worden. Es kömmt also hier blos darauf an, daß man untersuche ob diese Linie ab die Ellipse nicht allenfalls geschnitten habe, das heißt mit andern Worten, ob nicht noch ein Punkt derselben entweder früher oder später in der Ellipse liege. Allein, keiner dieser zween Fälle ist möglich: denn geschähe es später z. B. in b, so wäre eben dieses b ein Punkt der Ellipse, und dann müßten

$fb + Fb = a$, d. i. = der großen Achse seyn,
aber $db + bF < dF$ als Seiten eines Δes
und da $db = fb$ ist, weil doch das Δ dfb immer gleichschenklicht bleiben muß, so kann substituiert werden

$$fb + bF < dF$$

Nun ist $dF = a$, aus der Konstrukt.
Also auch $fb + bF < a$

Das nämliche ergiebt sich auch, wenn ein früherer Punkt c angeben wird; denn auch dießmal ist

$$cd + cF < dF \text{ oder } < a$$

§. 113. **Lehrsatz.** Die Winkel welche die Brennstrahlen mit der Tangente machen, sind überall einander gleich.

Satz. Fig. 32.

$$o = m$$

Beweis.

$s = o$ wegen der Theilung.
$s = m$ als Vertik.

also $o = m$

§. 114. **Anmerk.** Wenn hier wieder der Lehnsatz aus der Physik von der Gleichheit des Ein- und Ausfallwinkels abprellender Lichtstrahlen, wie oben §. 29 bey hohlen Paraboloiden, angewandt wird, so ist klar, daß in elliptischen Brennspiegeln Glut oder Flamme aus einem Fokus, brennbare Materie z. B. Schießpulver, Zunderschwamm, Holz u. d. gl. in dem andern Fokus anzünden müsse; weil alle Feuerstrahlen so gebrochen werden, daß sie sämmtlich in den andern Brennpunkt eintreffen. Eben so einleuchtend ist es, daß, wenn in elliptisch gebauten Gewölbern jemand in einem der Brennpunkte spricht, von niemand in der ganzen Halle könne gehört werden, als gerade von dem, der das Ohr im andern Brennpunkte hat. Weitere Anwendungen dieses Satzes, und zwar mit erheblichem Vortheile, lassen sich bey Sprachröhren, Beleuchtungen kleiner finsterer Gegenstände u. d. gl. anbringen.

Lehrsatz. Die Tangente ist in der Ellipse

$$= \frac{\sqrt{(ax - x^2)(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a(a - 2x)}$$

Beweis.

Man suche mehrmal für die Formel jeder Kurvatangente $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$ in der differentierten Gleichung ihr Aequivalent, so wird sich der Satz beståttigen.

Es ist unter andern auch $y^2 = \frac{c^2x}{a} = \frac{c^2x^2}{a^2} = \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$

diff. $2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{a^4}$

$dy^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{4a^4y^2}$

$+ dx^2 \quad + dx^2$

dy^2

$$dy^2 + dx^2 = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2}{4a^4y^2} + dx^2$$

$$= \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2 + 4a^4y^2dx^2}{4a^4y^2}$$

$\times y^2$ $$y^2(dy^2+dx^2) = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2 + 4a^4y^2dx^2}{4a^4}$$

Für y^2 in der zwoten Seite der Gleichung substituiert

$$y^2(dy^2+dx^2) = \frac{a^2c^4dx^2 - 4ac^4xdx^2 + 4c^4x^2dx^2 + 4a^4\left(\frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}\right)dx^2}{4a^4}$$

oder $$= \frac{c^2dx^2}{4a^4}(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2)$$

$\surd$ $$y\surd(dy^2+dx^2) = \frac{cdx}{2a^2}\sqrt{a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2)}$$

$: dy$ $$\frac{y\sqrt{dy^2+dx^2}}{dy}, \text{ oder Tang.} = \frac{c}{2a^2} \times \frac{dx}{dy}\sqrt{a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax-x^2)}$$

Den

Den Ausdruck $\frac{dx}{dy}$ nochmal aus der differenzierten Gleichung in endlichen Größen bestimmt:

$$2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$$

$$\times a^2 \qquad 2a^2ydy = ac^2dx - 2c^2xdx$$

$$:(ac^2 - 2c^2x) \qquad \frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$$

$:dy \qquad \frac{2a^2y}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{dx}{dy}$ Weil aber $y = \sqrt{\frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}}$, so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2a^2\sqrt{(ac^2x - c^2x^2) : a^2}}{ac^2 - 2c^2x} = \frac{2a^2\sqrt{c^2(ax - x^2)}}{c^2(a - 2x} = \frac{2ac\sqrt{ax - x^2}}{c^2(a - 2x} = \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)}$$

In der obigen Gleichung substituiert, giebt

$$\text{Tang} = \frac{c}{2a^2} \times \frac{2a\sqrt{ax - x^2}}{c(a - 2x)} \times \sqrt{a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2)}$$

$$\text{abgek.} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)(a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2 + 4a^2(ax - x^2))}}{a(a - 2x)}$$

§. 116.

§. 116. Anmerk. Um sich zu überzeugen, daß dieser Ausdruck wirklich der Tangente gleich sey, darf nur a = c gesetzt werden, und sie muß am Ende auf die Tangente des Zirkels zusamm fallen. Noch kürzer wird die Prüfung seyn, wenn sowohl für a als für c = 1 angenommen wird. Man bekömmt in diesem Falle

$$\frac{\sqrt{(x-x^2)\times\overline{1-4x+4x^2+4x-4x^2}}}{1-2x}=\frac{\sqrt{x-x^2}}{1-2x}$$

und dieß ist auch wirklich die Tangente des Zirkels. Denn weil die Subtangente nach §. 37, wenn a = 1 gesetzt wird, den Ausdruck bekömmt $\frac{2(x-x^2)}{1-2x}$, und die Tangente nichts anders ist, als die Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyecks, welches mit eben derselben die Subtangente und die Ordinate schliessen, folglich ist im Zirkel

$$Tang^2 = \left(\frac{2x-2x^2}{1-2x}\right)^2 + y^2$$

oder wenn statt y sein Werth gesetzt wird

$$Tang^2 = \left(\frac{2x-2x^2}{1-2x}\right)^2 + x - x^2$$

$$Tang^2 = \frac{4x^2-8x^3+4x^4}{1-4x+4x^2} + x - x^2$$

$$Tang^2 = \frac{4x^2-8x^3+4x^4+x-4x^2+4x^3-x^2+4x^3-4x^4}{1-4x+4x^2}$$

abgek. $Tang^2 = \frac{x-x^2}{1-4x+4x^2}$

$\sqrt{}$ $Tang = \frac{\sqrt{x-x^2}}{1-2x}$

§. 117. Anmerk. Leichter ist die Mühe zwar ungemein, wenn vorher die Subtangente der Ellipse gefunden wird, weil alsdann in dem rechtwinklichten Dreyecke, welches, wie gerade in der vorigen Anmerkung gesagt worden, Tangente, Subtangente und die Ordinate bilden, alles bis auf eben diese Größe bekannt ist: aber ich wollte geflissentlich durch diese vornichte Bahn zur Wahrheit gelangen, um die Differentialrechnung mehr gang und gäbe zu machen.

§. 118. **Lehrsatz.** Die Subtangente ist

$$\frac{2x(a-x)}{a-2x}$$

Beweis.

$$2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$$

$\times a^2$ $$2a^2ydy = ac^2dx - 2c^2xdx$$

$$\frac{2a^2ydy}{ac^2 - 2c^2x} = dx$$

$\times y$ $$\frac{2a^2y^2dy}{c^2(a-2x)} = ydx$$

$:dy$ $$\frac{2a^2y^2}{c^2(a-2x)} = \frac{ydx}{dy} = \text{Subt.}$$

statt y^2 substit. $$\frac{2a^2\left(\frac{c^2ax - c^2x^2}{a^2}\right)}{c^2(a-2x)} = \text{Subt.}$$

abgek. $$\frac{2(ax-x^2)}{a-2x} \text{ oder } \frac{2x(a-x)}{a-2x} = \text{Subt.}$$

§. 119. **Anmerk.** Um öfter zu zeigen, daß durch die verschiedensten Methoden am Ende doch immer die nämliche Wahrheit erzielt wird, so wollen wir durch Hilfe der Subtangente noch einmal die Tangente bestimmen. Es wird sich die nämliche Formel ergeben, die wir oben durch die Differentialrechnung gewonnen haben. Wegen dem rechtwinklichten Dreyecke ist demnach Fig. 31

$$tm^2 = tp^2 + mp^2$$

oder $\text{Tang}^2 = \text{Subt}^2 + y^2$. Für beydes

substit. $$\text{Tang}^2 = \left(\frac{2ax - 2x^2}{a-2x}\right)^2 + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$$

$$\text{Tang}^2 = \frac{4a^2x^2 - 8ax^3 + 4x^4}{(a-2x)^2} + \frac{ac^2x - c^2x^2}{a^2}$$

Zu

Zu gleichen Nennern gebracht, giebt demnach $Tang^2 = \frac{4a^4x^2 - 8a^3x^3 + 4a^2x^4 + a^3c^2x - 4a^2c^2x^2 + 4ac^2x^3}{a^2(a-2x)^2}$

abgek. $Tang^2 = \frac{4a^4x^2 - 8a^3x^3 + 4a^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$,

$\frac{+ a^3c^2x - 5a^2c^2x^2 + 8ac^2x^3 - 4c^2x^4}{a^2(a-2x)^2}$

Wird nun der Zähler dieses Bruches durch den Faktor $ax - x^2$ dividiert, so erhält man zum Quotus den andern Faktor $4a^3x - 4a^2x^2 + a^2c^2 - 4ac^2x + 4c^2x^2$, oder was eins ist $a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x)$

Folgl. $Tang^2 = \frac{(ax-x^2)(a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x))}{a^2(a-2x)^2}$

$Tang = \frac{\sqrt{(ax-x^2)(a^2c^2 - ac^2x + 4c^2x + 4a^2(ax-x^2))}}{a(a-2x)}$

§. 120. **Lehrsatz.** Wenn die Abscisse zur halben Achse wird, so ist Tangente und Subtangente einander gleich, das heißt sie sind beyde unendlich.

Voraussetzung.

$x = \frac{1}{2} a$

Satz.

$Tang. = Subt. = \infty$

Beweis.

1) Erwiesen wurde, daß

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{(ax - x^2)(a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x))}}{a(a - 2x)}$$

Nun für x das vorausgesetzte $\frac{1}{2}$ a substituiert

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\left(a^2c^2 + \frac{4a}{2}\left(a^3 - \frac{a^3}{2} - ac^2 + \frac{c^2a}{2}\right)\right)}}{a\left(a - \frac{2a}{2}\right)}$$

$$\text{Tang} = \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{2}\right)\right)}}{a \times (a - a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}a^2\left(a^2c^2 + a^4 - \frac{a^2c^2}{4}\right)}}{0} = \infty$$

folglich Tang $= \infty$

2) Ferner $\text{Subt.} = \frac{2ax - 2x^2}{a - 2x}$

Substituiert $\text{Subt.} = \frac{\frac{2a^2}{2} - \frac{2a^2}{4}}{a - \frac{2a}{2}}$

$$\text{Subt.} = \frac{a^2 - \frac{1}{2}a^2}{a - a}$$

$\text{Subt.} = \frac{\frac{1}{2}a^2}{0} = \infty$. Da nun auch

$$\frac{\text{Tang} = \infty}{\text{so ist} \quad \text{Tang} = \text{Subt} = \infty}$$

§. 121.

§. 121. **Lehrsatz.** Die Subnormal in der Ellipse ist $\frac{ac^2 - 2c^2x}{2a^2}$ oder $c^2\left(\frac{a-2x}{2a^2}\right)$

Beweis.

$$2ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{a^2}$$

$:2 \quad ydy = \frac{ac^2dx - 2c^2xdx}{2a^2}$

$:dx \quad \frac{ydy}{dx} = \frac{ac^2 - 2c^2x}{2a^2}$

aber $\frac{ydy}{dx}$ = Subnorm.

also Subnorm. $\frac{ac^2 - 2c^2x}{2a^2} = c^2\left(\frac{a-2x}{2a^2}\right)$

§. 122. **Lehrsatz.** Die Normal ist in der Ellipse $\frac{\sqrt{a^2c^2 + 4x(a^3c - c^2a^2x - ac^3 + c^4x}}{2a^2}$

Beweis. Fig. 31

In dem Δ mpq ist

$mq^2 = pq^2 + mp^2$

oder $\text{Norm}^2 = \text{Subnorm}^2 + y^2$

subst. $= \left(\frac{ac^2 - 2c^2x}{2a^2}\right)^2 + \frac{acx - c^2x^2}{a^2}$

$= \frac{a^2c^4 - 4ac^4x + 4c^4x^2}{4a^4} + \frac{acx - c^2x^2}{a^2}$

Die

Die Nenner gleich gemacht, d. i. die Zähler und Nenner des zweyten Bruches durch $4\,a^2$ multiplicirt

$$Norm^2 = \frac{a^2c^4 - 4\,ac^4x + 4c^4x^2 + 4\,a^3cx - 4a^2c^2x^2}{4\,a^4}$$

abgek. $$Norm^2 = \frac{a^2c^4 + 4\,x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}{4\,a^4}$$

$$Norm = \frac{\sqrt{a^2c^4 + 4\,x(a^3c - ac^4 + c^4x - a^2c^2x)}}{2\,a^2}$$

§. 123. Anmerk. Setzt man $c = a$, so kömmt zum Vorschein

$$Norm = \frac{\sqrt{a^6 + 4\,x(a^4 - a^4 + a^4x - a^4x)}}{2\,a^2}$$

$$Norm = \frac{\sqrt{a^6}}{2\,a^2} = \frac{a^3}{2\,a^2} = \frac{a}{2}$$

die Normal vom Zirkel; weil bekannt ist, daß jeder Halbmesser perpendikulär auf seiner Tangente steht, folglich die Normal abgiebt.

§. 124. Lehrsatz. Wenn die Absciße zur halben großen Achse wird, so verwandelt sich die Normal in die halbe kleine Achse, und die Subnormal verschwindet gänzlich.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2}\,a$$

Sätze.

1) $Norm. = \tfrac{1}{2}\,c$

2) $Subnorm. = 0$

Erster

Erster Beweis.

Es ist Norm $= \frac{c}{2a}\sqrt{a^2c^2 + 4x(a^3 - a^2x - ac^2 + c^2x)}$. Statt x substituiert

Norm $= \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^2c^2 + 2a\left(a^3 - \frac{a^3}{2} - ac^2 + \frac{c^2a}{2}\right)}$

abgek. $= \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^2c^2 + 2a\left(\frac{a^3}{2} - \frac{ac^2}{2}\right)}$

$= \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^2c^2 + a^4 - a^2c^2}$

$= \frac{c}{2a^2}\sqrt{a^4}$

$= \frac{ca^2}{2a^2}$

Norm $= \frac{1}{2}c$

Zweyter Beweis.

Subnorm $= \frac{c^2(a - 2x)}{2a^2}$

statt x wird $\frac{1}{2}$ a substituiert, so entsteht

Subnorm $= \frac{c^2(a - a)}{2a^2}$

abgek. $= \frac{c^2 \times 0}{2a^2} = \frac{0}{2a^2}$

Folgl. Subnorm $= 0$

§. 125. **Anmerk.** Wir haben hier mit Absicht die einzige Gleichung, wo statt des Parameters die kleine Achs in die Rechnung gebracht ist, zur Findung der Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal gebraucht; weil die beyden Achsen bey jeder Ellipse unmittelbar sogleich in die Augen fallen. Es sieht jeder von selbst, daß auch andere Gleichungen,

gen, wo nicht alle, dazu dienlich wären. Zur vollen Ueberzeugung soll die Subtangente von der kleinen Achse aus bestimmt werden. Man muß dießfalls die Aequation $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ in den Differentialkalkul aufnehmen. Weil aber hier z eine Abscisse vom Mittelpunkte an gerechnet bedeutet, so wird es gut seyn, statt selber ein Aequivalent von Scheitelabscissen zu setzen. Bezeichne man eine solche dem Φ entsprechende Abscisse durch ψ, so ist sehr natürlich, wie dieß aus Fig. 32 erhellet, wo $ap = ac - pc$,

daß $\psi = \frac{c}{2} - z$ und $z = \frac{c}{2} - \psi$ sey

Folglich $z^2 = \frac{1}{4}c^2 - c\psi + \psi^2$

Substit in $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}$ giebt

$$\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}\left(\frac{1}{4}c^2 - c\psi + \psi^2\right)$$

wirkl. mult. $\Phi^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2 c\psi - a^2\psi^2}{c^2}$

abgek. $\Phi^2 = \frac{a^2 c\psi - a^2\psi^2}{c^2}$

diff. $2\Phi d\Phi = \frac{a^2 c d\psi - 2a^2\psi d\psi}{c^2}$

$\times c^2$ $2c^2\Phi d\Phi = a^2 c d\psi - 2a^2\psi d\psi$

$$\frac{2c^2\Phi d\Phi}{a^2 c - 2a^2\psi} = d\psi$$

$\times \Phi$ $\frac{2c^2\Phi^2 d\Phi}{a^2 c - 2a^2\psi} = \Phi d\psi$

$: d\Phi$ $\frac{2c^2\Phi^2}{a^2 c - 2a^2\psi} = \frac{\Phi d\psi}{d\Phi} = \text{Subt.}$

statt Φ^2 den Werth $\frac{a^2 c\psi - a^2\psi^2}{c^2}$ gesetzt

kömmt

kömmt $$\frac{2c^2 \left(\frac{a^2 c\psi - a^2\psi^2}{c^2}\right)}{a^2 c - 2a^2\psi} = \text{Subt.}$$

abgek. $$\frac{2c\psi - 2\psi^2}{c - 2\psi} = \text{Subt.}$$

Es ist dieß der nämliche Ausdruck wie bey der großen Achse. Setze man, die Funktion ψ wachse so lange bis sie $= \frac{1}{2}c$ wird, so verwandelt sich die Formel in diese: $$\frac{\frac{2c^2}{2} - \frac{2c^2}{4}}{c - \frac{2c}{2}} = \frac{c^2 - \frac{c^2}{2}}{c - c}$$

$$= \frac{2c^2 - c^2}{2c - 2c} = \frac{c^2}{0} = \infty$$

Wo also gleiche Eigenschaft wieder Platz hat, wie oben §. 120.

§. 126. **Aufgabe.** Die Ellipse zu rektificieren.

Auflösung. Man differenziere die simpelste Gleichung z. B.

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$$

giebt $$2ydy = -\frac{2c^2 vdv}{a^2}$$

: 2 $$ydy = -\frac{c^2 vdv}{a^2}$$

quad. $$y^2 dy^2 = \frac{c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

div.

div. durch $y^2 = \frac{1}{4} c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\frac{1}{4} a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$

$$dy^2 = \frac{c^4 v^2 d v^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 d v^2}{a^6 c^2 - 4 a^4 c^2 v^2}$$

den Bruch verkl. durch $a^2 c^2$ giebt $= \frac{4 c^2 v^2 d v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$

$$+ d v^2 \qquad\qquad + d v^2$$

$$d y^2 + d v^2 = \frac{4 c^2 v^2 d v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2} + d v^2$$

$$= \frac{4 c^2 v^2 d v^2 + a^4 d v^2 - 4 a^2 v^2 d v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}$$

oder $= d v^2 \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^4 - 4 a^2 v^2}\right) = \frac{d v^2}{a^2} \left(\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}\right)$

$$\sqrt{(d y^2 + d v^2)} = \frac{d v}{a} \sqrt{\frac{4 c^2 v^2 + a^4 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}} = \frac{d v}{a} \sqrt{\frac{a^4 + 4 c^2 v^2 - 4 a^2 v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

$$= \frac{d v}{a} \sqrt{\frac{a^4 + (4 c^2 - 4 a^2) v^2}{a^2 - 4 v^2}}$$

oder

oder endlich $= \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - 4(a^2 - c^2)v^2}{a^2 - 4v^2}}$

Setzt man endlich aus Bequemlichkeit $4(a^2 - c^2) = m$ so erscheint

$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$. Nun noch aus Zähler und Nenner die Wurzel nach dem Binomiallehrsatze ausgezogen, so erhält man erstens

$$(a^4 - mv^2)^{\frac{1}{2}} = a^{4\times\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{4\times-\frac{1}{2}}\times - mv^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{1\times 2}a^{4\times-\frac{3}{2}}\times + (mv^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{1\times 2\times 3}a^{4\times-\frac{5}{2}}\times - (mv^2)^3$$

abgek. $= a^2 - \frac{mv^2}{2a^2} - \frac{m^2v^4}{8a^6} - \frac{m^3v^6}{16a^{10}} \ldots\ldots$

Zweytens $(a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2\times\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}a^{2\times-\frac{1}{2}}\times - 4v^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}{1\times 2}a^{2\times-\frac{3}{2}}\times + (4v^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}}{1\times 2\times 3},\ a^{2\times-\frac{5}{2}}\times - (4v^2)^3 \ldots$

abgek.

abgek. $= a - \frac{4v^2}{2a} - \frac{16v^4}{8a^3} - \frac{64v^6}{16a^5} \ldots\ldots$

noch mehr $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots\ldots$

Weil aber $m = 4a^2 - 4c^2$

und $m^2 = 16a^4 - 32a^2c^2 + 16c^4$

wie auch $m^3 = 64a^6 - 192a^4c^2 + 192a^2c^4 - 64c^6$, so kann in der Reihe dafür substituiert werden.

Folglich $a^2 - \frac{4a^2v^2}{2a^2} + \frac{4c^2v^2}{2a^2} - \frac{16a^4v^4}{8a^6} + \frac{32a^2c^2v^4}{8a^6} - \frac{16c^4v^4}{8a^6} - \frac{64a^6v^6}{16a^{10}}$

$+ \frac{192a^4c^4v^6}{16a^{10}} - \frac{192a^2c^4v^6}{16a^{10}} + \frac{64c^6v^6}{16a^{10}} \ldots\ldots$

Abgek. $a^2 - 2v^2 + \frac{2c^2v^2}{a^2} - \frac{2v^4}{a^2} + \frac{4c^2v^4}{a^4} - \frac{2c^4v^4}{a^6} - \frac{4v^6}{a^4} + \frac{12c^2v^6}{a^6} - \frac{12c^4v^6}{a^8}$

$+ \frac{4c^6v^6}{a^{10}} \ldots\ldots$

Und durch $a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} - \frac{4v^6}{a^5} \ldots\ldots$ div., giebt $a + \frac{2c^2v^2}{a^3} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots\ldots$

Daher

Daher $\sqrt{dv^2 + dy^2} = \frac{dv}{a}\left(a + \frac{2c^2v^2}{a^2} + \frac{8c^2v^4}{a^5} - \frac{2c^4v^4}{a^7} \ldots\right)$

$= dv + \frac{2c^2v^2dv}{a^3} + \frac{8c^2v^4dv}{a^6} - \frac{2c^4v^4dv}{a^8} \ldots$

$S(\sqrt{dv^2 + dy^2}) = v + \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \frac{8c^2v^5}{5a^6} - \frac{2c^4v^5}{5a^8} \ldots$

oder $v + \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \left(\frac{8a^2c^2 - 2c^4}{5a^8}\right)v^5 \ldots$ Setzt man nun $v = \frac{1}{2}a$ so ist der vierte Theil der Ellipse rektificiert:

$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2a^3}{24a^4} + \frac{(8a^2c^2 - 2c^4)a^5}{5 \times 32a^8} \ldots$

abgek. $\frac{1}{2}a + \frac{c^2}{12a} + \frac{8a^2c^2 - 2c^4}{160a^3} \ldots$ Dieß viermal genommen, giebt die ganze rektificierte Ellipse

$2a + \frac{c^2}{3a} + \frac{8a^2c^2 - 2c^4}{40a^3} \ldots = 2a + \frac{c^2}{3a} + \frac{4a^2c^2 - c^4}{20a^3} \ldots$

§. 127. Zusatz. Wird a = c = 2, so erhält man wieder die Rektifikation des Zirkels in Halbmeßern wie §. 72. Diff.

$$4 + \frac{4}{6} + \frac{8 \times 4 \times 4 - 5 \times 16}{10 \times 8} \ldots$$

$$4 + \frac{2}{3} + \frac{3}{10} \ldots$$

§. 128. Zusatz. Indeß fällt bey Bestimmung der Länge einer Ellipsenlinie die Sache doch allemal anderst aus, wenn ein Zirkel, welcher zum Diameter die geometrische Mittelgröße beyder ihrer Achsen hat; und wenn die Ellipse selbst berechnet wird: obwohl es in Rücksicht der Quadratur und Kubatur, wie wir hören werden, immerhin wahr bleibt, daß die beyden Rechnungen am Ende auf eins hinaus laufen. Denn bildet man sich eine Ellipse ein, deren kleine Achse unendlich klein ist, wie der Fall doch sehr wohl Möglichkeit zuläßt, so ist klar, daß die Länge einer solchen Ellipsenlinie der doppelten großen Achse ungemein nahe kommen muß, und dieß erhält man auch aus der Reihe. Es sey nämlich $c = \frac{1}{\infty}$ so ergiebt sich

$$2a + \frac{\frac{1}{\infty 2}}{3a} + \frac{4a^2 \frac{1}{\infty 2} - \frac{1}{\infty 4}}{20 a^3} \ldots$$ wo alle

übrigen Glieder nach §. 18 Diff. bis auf 2 a verschwinden; welches aber, wenn $a = a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ gedacht wird, bey Zirkel niemals wahr seyn kann; weil schon nothwendig das erste Glied unendlich klein seyn muß, ohne erst von den übrigen Gliedern zu reden.

§. 129. Anmerk. Ich kann nicht umhin, ein Beyspiel zu einiger Anwendung dieser unsrer Rektifikation hier einzuweben. Irgendwo mußte eine Rennbahn, weil es die Lage des Platzes nicht anders verstattete, elliptisch ausgesteckt

werden.

werden. Die größte Länge des in der Mitte eingefangten Raumes betrug 472 Schritte, und die Breite desselben 280 Schritte. Wie viel dergleichen Schritte mag beyläufig diese Rennbahn groß seyn?

Auflösung. Diese angegebne Länge und Breite stellen nichts anders als Achsen der elliptischen Rennbahn vor. Daher ist in diesem besondern Fall die Reihe

$$= 2 \times 472 + \frac{280^2}{3 \times 470} + \frac{4 \times 472^2 \times 280^2 - 280^4}{20 \times 472^3} \ldots$$

$$= 944 + \frac{78400}{1416} + \frac{6986506 2400 - 6146560000}{2103081960}$$

$= 944 + 55 + 30 + 5 \ldots = 1034$ Schritte ungefähr.

§. 130. Aufgabe. Eine Ellipse quadrieren.

Auflösung. Es werde in einer der sechs Gleichungen ein Aequivalent für ydx oder ydv gefunden und integriert, so erhält man, wenn v oder $x = \frac{1}{2}a$ gesetzt wird, den vierten Theil der Ellipsenfläche. Z. B. wieder in

$$y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} = \frac{\tfrac{1}{4}a^2 c^2 - c^2 v^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 c^2 - 4 c^2 v^2}{4 a^2}} = \frac{c}{2a} \sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

$$\times dv \qquad y\,dv = \frac{c\,dv}{a^2} \sqrt{a^2 - 4 v^2}$$

Aus $a^2 - 4v^2$ wirkl. die Wurzel gezogen

$$\sqrt{a^2 - 4v^2} = (a^2 - 4v^2)^{\frac{1}{2}} = a^{2 \times \frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} a^{2 \times -\frac{1}{2}} \times - 4v^2 + \frac{\frac{1}{2} \times - \frac{1}{2} a^{2 \times -\frac{3}{2}} \times + 16 v^4}{1 \times 2} \ldots$$

oder

oder $= a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \dots$

Folgl. $ydv = \frac{cdv}{2a}\left(a - \frac{2v^2}{a} - \frac{2v^4}{a^3} \dots\right)$ oder

$$ydv = \frac{cdv}{2} - \frac{cv^2dv}{a^2} - \frac{cv^4dv}{a^4} \dots$$

$$S(ydv) = \frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \dots$$

Das $v = \frac{a}{2}$ gesetzt, giebt den Quadranten

$$S(ydv) = \frac{ac}{4} - \frac{ac}{24} - \frac{ac}{40} \dots$$

Durch 4 mult., so ist

Quadratura Ellipſ. $= ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{160} \dots$

§. 131. Zusatz. Setzt man $a = c = 2$, so verwandelt sich diese Reihe in jene des Zirkels $4 - \frac{4}{6} - \frac{4}{10} \dots = 4 - \frac{2}{3} - \frac{1}{10} \dots$ wie §. 76 Diff. oder ist $a = c = d$, $d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \dots$

§. 132. Zusatz. Das nämliche ergiebt sich, wenn für a und c die geometrische Mittelgröße $\sqrt{ac}$ oder $a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}$ in die Reihe aufgenommen wird, und diese beständige Quantität z. B. durch $2r$ ausgedruckt wird.

$$a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{6} - \frac{a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}}}{40}$$

oder $4r^2 - \frac{4r^2}{6} - \frac{4r^2}{40} \dots$

$$4r^2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{1}{10}r^2 \dots$$

§. 133.

§. 133. Zusatz. Es ist nun zum drittenmale erwiesen, daß es eines sey, ob man eine Ellipse berechnet oder einen Zirkel, der zum Diameter die mittlere Proportionallinie zwischen den beyden Achsen hat.

Der förmliche Beweis von diesem Satze sieht so aus.

Voraussetzung.

$$d = \sqrt{ac}$$

Satz.

$$\text{Circ.} = \text{Ellips.}$$

Beweis.

$$C = d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \dots$$

$$E = ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \dots$$

$$C : E = \left(d^2 - \frac{d^2}{6} - \frac{d^2}{40} \dots\right) : \left(ac - \frac{ac}{6} - \frac{ac}{40} \dots\right)$$

oder $= d^2\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \dots\right) : ac\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} \dots\right)$

$C : E = d^2 : ac$

aber $d = \sqrt{ac}$

also $d^2 = ac$ substit.

$C : E = d^2 : d^2$ und

$: d^2$ $d^2 C = d^2 E$

$C = E$

 §. 134.

§. 134. Lehrsatz. Der Quadratinhalt einer Ellipse ist beynahe der vierte Theil des Produkts aus den beyden Achsen und der Zahl 3, 14...

Satz.

$$\text{Quad. Ellips.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

Beweis.

Im Zirkel ist $q = \frac{d^2\pi}{4}$

aber in einer gleichgroßen Ellipse ist

$$d = a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a\,c}$$

und $d^2 = a\,c$

Substit.

$$\text{Quad. Ellips.} = \frac{a\,c\,\pi}{4}$$

§. 135. Anmerk. Wir halten uns zu lange auf, auch verschiedne Abschnitte der Ellipse, wie bey der Parabel, zu berechnen. Daß aber indeß die Sache möglich sey, sieht aus dem bisherigen jeder von selbst.

§. 136. Aufgabe. Jede Ellipse durch Zeichnung in einen Zirkel zu verwandeln.

Auflösung. Man setze in gerader Richtung die halbe kleine Achse an die halbe große Achse, schwinge um diese beyden Achsenhälften einen halben Zirkel und fälle von der Peripherie auf dem Zusammstossungspunkt einen Perpendikel herab, so ist dieß der Radius eines Zirkels, der gleiche Flächengröße mit der Ellipse hat.

Satz. Fig. 35.

$$a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = km$$

Beweis.

Es ist $ab : bd = bd : bc$ oder nach der Substit. $\frac{a}{2} : \frac{mk}{2} = \frac{mk}{2} : \frac{c}{2}$ 2×

$$a : mk = mk : c$$

$$ac = mk^2$$

$$a^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}} = mk$$

§. 137. Anmerk. Eine kleine Anwendung hierüber fürs Praktische. Irgend ein französischer Mahler war gewohnt seine Freskogemälde nach Quadratmaaß zu übernehmen, und sich für den Schuh 4 Livers zahlen zu lassen. Nun sollte er ein großes Plafond mahlen, das eine wahre elliptische Figur hatte von 55 Fuß Länge und 33 Fuß Breite. Er foderte gemäß seinem Ueberschlage 6000 Livers. Es fragt sich demnach, ob diese Foderung billig war?

Auflösung. Weil $q = \frac{ac\pi}{4}$ ist, so darf nur substituiert werden: folglich

$$q = \frac{55 \times 33 \times 3{,}14..}{4} = \frac{5699{,}1}{4} = 1424{,}7 \; \square\text{schuhe.}$$

Dieß mit 4 multipliciert, giebt 5698,8 Livers. Er hat daher um 301,2 Livers zu viel gefodert.

§. 138. Erkl. Dreht sich die Ellipse um die große Achse, so entsteht eine länglichte Sphäroide, oder Afterkugel; hingegen, um die kleine Achse, eine platte Sphäroide.

§. 139. Anmerk. Es giebt noch eine dritte Gattung von Elliptoiden, welche entstehen, wenn eine Ellipse durch einen schiefen Diameter in zween gleiche Theil getheilt, und wenn dann ein solches Stück um seine Achse bewegt wird. Dieser birnförmige Körper nun wird ein geometrisches Herz

 genannt.

genannt. d'Alemberts Berechnung dieses Körpers verräth einen sehr tiefen Blick in die inneren Geheimnisse der Mathematik Sie kann im deutschen Realwörterbuch unter dessen Artikel nachgeschlagen werden.

§. 140. **Aufgabe.** Eine länglichte Sphäroide kubieren.

Auflösung. Das Element jedes runden Körpers ist nach §. 82 Diff. $\pi y^2 dx$. Man bestimme es daher in einer der sechs Gleichungen, z. B. in

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \qquad \pi y^2 dx = \frac{\pi c^2 x dx}{a} - \frac{\pi c^2 x^2 dx}{a^2}$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi c^2 x^2}{2a} - \frac{\pi c^2 x^3}{3a^2}$$

Wenn nun $x = \frac{1}{2} a$ wird

$$S = \frac{\pi c^2 a^2}{8a} - \frac{\pi c^2 a^3}{24 a^2}$$

$$= \frac{\pi c^2 a}{8} - \frac{\pi c^2 a}{24}$$

Die Nenner gleich gemacht

$$S = \frac{3\pi a c^2 - \pi a c^2}{24} = \frac{2\pi a c^2}{24} = \frac{\pi a c^2}{12}$$

Weil aber dieß nur die halbe Elliptoide seyn kann, so ist

$$S = \frac{a c^2 \pi}{6}$$

§. 141. **Zusatz.** Nimmt man mehrmals an daß $a = c = d$ sey, so verwandelt sich unser Ausdruck $\frac{a c^2 \pi}{6}$ in die Kugelformel $\frac{d^3 \pi}{6}$ Geom. §. 240.

§. 142. Zusatz. Es wird unschwer einzusehen seyn, daß man sich bey der Kubatur der platten Elliptoide einer Gleichung bedienen müsse, wo die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen sind.

§. 143. Anmerk. Nehmen wir zur Anwendung folgende Aufgabe für uns. In Ermanglung einer richtigen Feinwage, soll der Werth einer aus Silber verfertigten Zitrone durch die Geometrie berechnet werden. Sie hält $2\frac{3}{4}$ Zoll in der Länge und 2 Zoll in der Dicke rheinländischen Maases.

Auflösung. Da die Figur einer Zitrone den Elliptoiden sehr nahe, wo nicht ganz damit übereins kömmt, so muß sie auch nach der Elliptoidenformel berechnet werden. Folglich

$$\frac{2\frac{3}{4} \times 2^2 \times 3{,}14}{6} = \frac{\frac{11}{4} \times 4 \times 3{,}14}{6} = \frac{11 \times 3{,}14}{6} = \frac{34{,}54}{6}$$

$= 5{,}756$ Kubikzoll. Da nun nach Prof. Karsten in seinem Auszuge, Statik §. 14 ein rheinländischer Kubikzoll Silber 3283 Gran (köllnisches Gewicht) wiegt, und die Mark Silber ungefähr auf 20 fl. angesetzt werden darf, so gilt die Proportion

$$\text{1 Mark} : 20 \text{ fl} = 3283 \text{ Gran} : x \text{ fl}$$

$$\text{oder } 5760 \text{ G.} : 20 = 3283 : x$$

$$5760 x = 65660$$

$$x = \frac{65660}{5760} = 11 \text{ fl } 23\tfrac{23}{24} \text{ kr.}$$

für 1 Kubikzoll

§. 144. Anmerk. Die Berechnung der Sphäroiden hat vorzüglich ihren Nutzen in der Baukunst, wenn man die Masse oder den Druck elliptischer Rundgewölber zu berechnen wünscht.

§. 145. Aufgabe. Die Oberfläche der Elliptoide zu bestimmen.

Auf-

genannt. d'Alemberts Berechnung dieses Körpers verräth einen sehr tiefen Blick in die inneren Geheimnisse der Mathematik Sie kann im deutschen Realwörterbuch unter dessen Artikel nachgeschlagen werden.

§. 140. **Aufgabe.** Eine länglichte Sphäroide kubieren.

Auflösung. Das Element jedes runden Körpers ist nach §. 82 Diff. $\pi y^2 dx$. Man bestimme es daher in einer der sechs Gleichungen, z. B. in

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \qquad \pi y^2 dx = \frac{\pi c^2 x dx}{a} - \frac{\pi c^2 x^2 dx}{a^2}$$

$$S(\pi y^2 dx) = \frac{\pi c^2 x^2}{2a} - \frac{\pi c^2 x^3}{3a^2}$$

Wenn nun $x = \frac{1}{2} a$ wird

$$S = \frac{\pi c^2 a^2}{8a} - \frac{\pi c^2 a^3}{24 a^2}$$

$$= \frac{\pi c^2 a}{8} - \frac{\pi c^2 a}{24}$$

Die Nenner gleich gemacht

$$S = \frac{3\pi a c^2 - \pi a c^2}{24} = \frac{2\pi a c^2}{24} = \frac{\pi a c^2}{12}$$

Weil aber dieß nur die halbe Elliptoide seyn kann, so ist

$$S = \frac{a c^2 \pi}{6}$$

§. 141. **Zusatz.** Nimmt man mehrmals an daß $a = c = d$ sey, so verwandelt sich unser Ausdruck $\frac{a c^2 \pi}{6}$ in die Kugelformel $\frac{d^3 \pi}{6}$ Geom. §. 240.

§. 142.

§. 142. Zusatz. Es wird unschwer einzusehen seyn, daß man sich bey der Kubatur der platten Elliptoide einer Gleichung bedienen müsse, wo die Ordinaten auf der kleinen Achse gezogen sind.

§. 143. Anmerk. Nehmen wir zur Anwendung folgende Aufgabe für uns. In Ermanglung einer richtigen Feinwage, soll der Werth einer aus Silber verfertigten Zitrone durch die Geometrie berechnet werden. Sie hält $2\frac{3}{4}$ Zoll in der Länge und 2 Zoll in der Dicke rheinländischen Maases.

Auflösung. Da die Figur einer Zitrone den Elliptoiden sehr nahe, wo nicht ganz damit übereins kömmt, so muß sie auch nach der Elliptoidenformel berechnet werden. Folglich

$$\frac{2\frac{3}{4} \times 2^2 \times 3{,}14}{6} = \frac{\frac{11}{4} \times 4 \times 3{,}14}{6} = \frac{11 \times 3{,}14}{6} = \frac{34{,}54}{6}$$

= 5,756 Kubikzoll. Da nun nach Prof. Karsten in seinem Auszuge, Statik §. 14 ein rheinländischer Kubikzoll Silber 3283 Gran (köllnisches Gewicht) wiegt, und die Mark Silber ungefähr auf 20 fl. angesetzt werden darf, so gilt die Proportion

$$1 \text{ Mark} : 20 \text{ fl} = 3283 \text{ Gran} : x \text{ fl}$$

oder $$5760 \text{ G.} : 20 = 3283 : x$$

$$5760x = 65660$$

$$x = \frac{65660}{5760} = 11 \text{ fl } 23\frac{23}{24} \text{ kr.}$$

für 1 Kubikzoll

§. 144. Anmerk. Die Berechnung der Sphäroiden hat vorzüglich ihren Nutzen in der Baukunst, wenn man die Masse oder den Druck elliptischer Rundgewölber zu berechnen wünscht.

§. 145. Aufgabe. Die Oberfläche der Elliptoide zu bestimmen.

Auflösung. Das Oberflächenelement ist, wie wir es schon bey der Parabel genutzt haben, $2\pi y\sqrt{dv^2 + dy^2}$, wo $2\pi y$ die Peripherie jedes runden Körpers und $\sqrt{dv^2 + dy^2}$ den unendlich kleinen Abstand von einem Kreise eines solchen Körpers bis zum andern ausdrückt. Folglich wollen wir einen Werth dafür in der differentierten Gleichung finden, z. B. wieder in

$$2y\,dy = \frac{-2c^2 v\,dv}{a^2}$$

$$4y^2 dy^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4}$$

$$+4y^2 dv^2 = +4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)dv^2$$

$$\overline{4y^2 dy^2 + 4y^2 dv^2 = \frac{4c^4 v^2 dv^2}{a^4} + 4\left(\tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}\right)dv^2}$$

$$4y^2(dy^2 + dv^2) = 4c^2 dv^2\left(\frac{c^2 v^2}{a^4} + \tfrac{1}{4} - \frac{v^2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{4c^2 dv^2}{a^4}\left(c^2 v^2 + \tfrac{1}{4}a^4 - a^2 v^2\right)$$

$$2y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2cdv}{a^2}\sqrt{(c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2)}$$

$\times\pi$ $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{2\pi cdv}{a^2}\sqrt{c^2v^2+\tfrac{1}{4}a^4-a^2v^2}$$

oder $$2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{4c^2v^2+a^4-4a^2v^2}$$

$$= \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-4(a^2-c^2)v^2}$$

Und wenn $4(a^2-c^2)$ wieder m gelten soll

$$2\pi y\sqrt{dy^2-dv^2} = \frac{\pi cdv}{a^2}\sqrt{a^4-mv^2}$$

Es ist aber $$\sqrt{a^4-mv^2} = a^2 - \frac{mv^2}{2a^2} - \frac{m^2v^4}{8a^6} - \frac{m^3v^6}{16a^{10}}$$ §. 126

Folg.

Folglich $2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2} = \frac{\pi c dv}{a^2}\left(a^2 dv - \frac{mv^2 dv}{2a^2} - \frac{m^2v^4 dv}{8a^6} - \frac{m^3v^6 dv}{16a^{10}} \ldots\right)$

$S(2\pi y\sqrt{dy^2+dv^2}) = \frac{\pi c}{a^2}\left(a^2 v - \frac{mv^3}{6a^2} - \frac{m^2 v^5}{40a^6} - \frac{m^3 v^7}{112a^{10}} \ldots\right)$

$= \pi\left(cv - \frac{mcv^3}{6a^4} - \frac{m^2cv^5}{40a^8} - \frac{m^3cv^7}{112a^{12}} \ldots\right)$

Wird $v = \frac{1}{2}a$, so ist endlich

$S(2\pi y$ &c. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{mc}{48a} - \frac{m^2c}{1280a^3} - \ldots\right)$

Und zuletzt noch für m substit. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{4(a^2-c^2)c}{48a} - \frac{16(a^2-c^2)^2c}{1280a} \ldots\right)$

abgek. $= \pi\left(\frac{ca}{2} - \frac{(a^2-c^2)c}{12a} - \frac{(a^2-c^2)^2c}{80a^3} \ldots\right)$

Folglich die ganze Oberfläche $= \pi\left(ca - \frac{(a^2-c^2)c}{6a} - \frac{(a^2-c^2)^2c}{40a^3} \ldots\right)$

§. 146.

§. 146. Zusatz. Auch hier kömmt die Oberfläche der Kugel zum Vorschein, wenn $c = a = d$ angenommen wird, indem alle Glieder der unendlichen Reihe, das erste ausgenommen, zu Null werden, und nur noch $d^2 \pi$ übrig bleibt.

§. 147. Anmerk. Ein kleines Beyspiel dörfte auch dießmal nicht schaden. Ein Physiker möchte sich gerne einen Luftballon anschaffen, um damit Versuche zu machen. Wie viel wird er Taffent dazu vonnöthen haben, wenn derselbe 3 Ellen hoch und 2 Ellen dick werden soll?

Auflösung. Da ein solcher Ballon eine Ellipsoide giebt, so muß der Taffent von aussen die Oberfläche derselben vorstellen. Folglich gilt die Reihe

$$= 3{,}14 \left(3 \times 2 - \frac{(9-4)\times 2}{18} - \frac{(9-4)^2 \times 2}{40 \times 27} \ldots\right)$$

$$= 3{,}14 \left(6 - \frac{10}{18} - \frac{50}{1080} \ldots\right)$$

$$= 3{,}14 \left(6 - \frac{5}{9} - \frac{5}{108} \ldots\right) = 3{,}14 \left(6 - \frac{60+5}{108} \ldots\right)$$

$$= 3{,}14 \left(6 - \frac{65}{108}\right) = 3{,}14 \times 5\,\frac{43}{108} = \frac{3{,}14 \times 583}{108}$$

$$= \frac{1830{,}62}{108} = 16{,}9$$ d. i. beynahe 17 Ellen, wenn der Taffent ellenbreit ist.

§. 148. Anmerk. Endlich käme die Reihe auch an die Verfahrungsart, wie man unendlicherley Ellipsen auf einmal rektificieren, quadrieren u. s. f., ingleichen auch, wie man ihre Tangenten und Normalen allgemein bestimmen müsse; weil aber dieser Artikel von keinem sonderlichen Belange ist, und zudem der Kalkul hierüber sehr weitläuftig und mühsam läßt, so wollen wir sie übergehen, und statt dessen hier am Ende der abgehandelten Ellipse nur noch anmerken, daß diese krumme Linie und ihre vorgetragene Lehrsätze in der Astronomie eine ungemein ausgebreitete Anwendung finden; weil die Laufbahnen der Erde und der übrigen Planeten lauter Ellipsen, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet, vorstellen, folglich auch nach ihren Gesetzen berechnet werden müssen.

Von

Von der Hyperbel.

§. 149. Erkl. Wenn man sich vorstellt, daß auf der Spitze jenes Kegels, woraus eine Hyperbel geschnitten worden, ein anderer gleich großer Kegel gerade umgekehrt stehe, so wird die rückwärts verlängerte Abscissenlinie der Hyperbel auch diesen Kegel schneiden und zur neuen entgegengesetzten Abscissenlinie werden. Die Entfernung nun von einem Schnitte zum andern wird die Achse der Hyperbel, und der aus dem Vereinigungspunkt der Kegelspitzen darauf hingefällte Perpendikel, die Querachse, Nebenachse (wir wollen sie mehrmal durch c bezeichnen) genennt. Die Vertikalschenkel jener Dreyecke, welche durch der Kegel Mitte gehen heissen die Assymtoten der Hyperbel. Ein solches Dreyeck kömmt in mathematischen Schriften oft unter dem Name des Achsentriangels vor. Fig. 36 ist demnach a g die Achse

d c = a k wegen Parallelismus die halbe Querachse, und weil wegen dem gleichschenklichten Dreyecke a k = q k, so ist auch

a q die ganze Querachse. Und endlich

d s sammt d l die Assymtoten.

§. 150. Zusatz. Da der Achsentriangel in der ganzen Runde des Kegels herum sich selbst gleich bleibt, so kann derselbe auch parallel mit der Hyperbelfläche gedacht werden, welches man auch eigentlich für die gehörige Lage zu einander annimmt. In dieser Lage nun stehen die Aeste der Hyperbel auf den Endpunkten einer Sehne von des Kegels Grundfläche und die Assymtoten auf den Endpunkten des Diameters. Weil aber bey jeder Verlängerung des Kegels, und zwar bis ins Unendliche

dieß

dieß wahr bleibt, so folgt itzt schon klar daraus, daß die Hyperbeläste von den Assymtoten immer an Divergenz übertroffen werden. Tiefer unten wird dieser Satz auch aus der Natur der Hyperbelgleichung erwiesen werden. Indeß ist die Sache aus der Natur des Schnittes sattsam dargethan, wie aus Fig. 37 erhellet, daß b d immer kleiner seyn müsse als f g.

§. 151. Anmerk. Indeß ist dieß nur von solchen Hyperbeln wahr, die mit der Achse des Kegels parallel laufen. Andere Schnitte, die schief durch den Kegel gehen, und sich gegen die Achse neigen, ohne daß sie sich auf der andern Seite des Kegels enden könnten, wenn man ihn auch unendlich verlängern würde, nennt C. L. Schübler zwar auch Hyperbeln, und zwar so lange, bis der Schnitt parallel mit einer Seite des Kegels fortläuft, in welchen Fall, wie bekannt, sich eine Parabel bildet. Allein es ist unumgänglich nothwendig, daß diese angebliche Art von Hyperbeln einmal ihre Assymtoten, oder den Achsentriangel erreichen, weil sie früh oder spät die Kegelachse schneiden müssen; ausser sie würden sich von dieser Achse immer mehr und mehr entfernen, welcher Fall freylich eben sowohl als der erste möglich ist.

§. 152. Zusatz. Bey der Ellipse dorfte die Abscisse vorwärts verlängert werden, um die Achse abzugeben; hier bey der Hyperbel muß es rückwärts geschehen: folglich hat sie eine entgegengesetzte Lage und kann mit Recht, weil die Ellipsenachse positiv gesetzt wurde, negativ heißen.

§. 153. Lehrsatz. In jedem Punkte der Hyperbel ist das Quadrat der Ordinate gleich dem Produkte aus drey Faktorn, deren einer der Parameter, der andere die Abscisse, und der dritte die Summe der Abscisse und der Achse ist, alles durch die Achse dividiert.

Satz.

$$y^2 = \frac{p\,x\,(a+x)}{a}$$

Beweis.

Beweis.

Man schneide mehrmal den Kegel in jener Gegend, wo die krume Linie befindlich ist, parallel mit der Achse durch, so wird irgendwo eine gemeinschaftliche Ordinate dieses entstandnen Zirkels und der Hyperbel auf einem gemeinschaftlichen Punkte der zwo Kurvenachsen perpendikulär stehen. Es ist daher Fig. 36

$$pm^2 = hp \times pf.$$

oder $$y^2 = hp \times pf.$$

Nun müssen für hp und pf Werthe gefunden werden.

Weil aber $\Delta\, gqa \sim \Delta\, aph$; indem der Winkel $pah = o = x$ wegen Parallelismus, und zween Winkel rechte sind, so gilt die Proportion

$$ga : qa = ap : ph$$

subst. $$a : c = x : ph$$

Folgl. $$ph := \frac{cx}{a}$$

Ferner $\Delta\, gaq \sim \Delta\, gfp$ aus obigen Gründen

also $$ga : aq = gp : pf$$

wieder subst. $$a : c = a + x : pf$$

und $$pf = \frac{c(a + x)}{a}.$$ Diese Werthe in der ersten Gleichung des Beweises mit hp und pf vertauscht giebt

$$y^2 = \frac{cx}{a} \times \frac{c(a + x)}{a}$$

oder $$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x(a + x)}{a}.$$ Da aber $\frac{c^2}{a}$ schon in der Ellipse die Stelle des Parameters vertratt, so kann es auch hier geschehen, und ebenfalls durch p ausgedrückt werden. Folglich ist

$$y^2 = \frac{p\,x(a + x)}{a}$$

§. 154.

§. 154. Zusatz. Es stimmt sohin die Gleichung der Hyperbel völlig mit der der Ellipse überein, wenn man ausnimmt, daß sich das Minuszeichen in Plus verwandelt habe. Ueberhaupt liegt der ganze Unterschied der beyden Linien darinn, daß die große Achse in der Hyperbel negativ, in der Ellipse hingegen positiv sey; denn setzt man in der Hyperbelgleichung $y^2 = \frac{px(a+x)}{a}$ statt $+a$ überall $-a$ hinein, so giebt dieß

$$y^2 = \frac{px(-a+x)}{-a} = \frac{-apx}{-a} + \frac{px^2}{-a}$$

$$= px - \frac{px^2}{a}, \text{ wie bey der Ellipse §. 64.}$$

§. 155. Zusatz. Das nämliche beweiset sich auch wenn der Parameter in Achsenwerthen ausgedrückt in der Gleichung stehen bleibt. Es ist, weil

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x(a+x)}{a} \text{ §. 153 am Ende.}$$

folglich $y^2 = \frac{ac^2x}{a^2} + \frac{c^2x^2}{a^2}$

oder $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, wo sich mehrmal statt $-$ das Pluszeichen einfindet. Setzt man nun wiederum gleich anfangs im zweyten Gliede überall $-a$, welches aber beym Parameterausdrucke $\frac{c^2}{a}$ nicht geschehen darf, weil der Parameter immer einen positiven Werth beybehalten muß, so kömmt

$$y^2 = \frac{c^2}{a} \times \frac{x(-a+x)}{-a}$$

$$= \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{-a^2} = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2} \text{ zum Vorschein.}$$

§. 156. Zus. Die Urgleichung $y^2 = \frac{px(a+x)}{a}$ kann auch sehr füglich in diese aufgelöset werden

$$y^2 = px + \frac{px^2}{a}$$

woraus dann der Grund fließt, warum die Kurve derselben Hyperbel genennt wird; weil nämlich das Quadrat der Ordinate um den Ueberschuß $\frac{px^2}{a}$ größer ist, als das Produkt aus dem Parameter in die Abscisse.

§. 157. Zusatz. Auch hier ist es klar, daß es zu beyden Seiten der Abscissenlinie Ordinaten gebe, indem wieder $y = \pm \sqrt{\frac{px(a+x)}{a}}$

oder $= \pm \sqrt{\frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}}$ seyn muß.

§. 158. Zusatz. Es verhalten sich demnach in jedem Punkte der Hyperbel die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte aus den Abscissen in die Summe der Achse und Abscisse zusammgenommen. Denn man darf nur, wie in der Ellipse §. 66 zwo Gleichungen in eine Proportion auflösen, so erhält man $y^2 : Y^2 = \frac{px(a+x)}{a} : \frac{pX(a+X)}{a}$ aX

$$y^2 : Y^2 = px(a+x) : pX(a+X)$$

$$y^2 : Y^2 = x(a+x) : X(a+X) \qquad p:$$

§. 159. Lehrsatz. Die Achse wird sowohl am Anfange als am Ende von der Hyperbel geschnitten.

Beweis.

Beweis.

Man lasse einmal x = o und im zweyten Falle x = — a werden, so verwandelt sich in jedem Falle die Ordinate in Null; denn

$$\text{I} \quad y^2 = \frac{p\,o \times (a+o)}{a} = o$$

also auch $y = o$

$$\text{II} \quad y^2 = \frac{p \times -a\,(a-a)}{a} = \frac{-p\,a \times o}{a} = o$$

folglich auch $y = o$

§. 160. **Lehrsatz.** Auf der negativen Achse ist keine Ordinate möglich, wohl aber jenseits derselben.

Beweis.

Wäre auf der negativen Achse eine Ordinate möglich, so müßte ihr auch ein Theil derselben als Abscisse entsprechen, z. B. $-\frac{a}{m}$, wo m jede ganze oder auch gemischte Zahl vorstellen soll; aber in diesem Fall ändert sich die Gleichung in

$$y^2 = \frac{p \times -\frac{a}{m}\left(a - \frac{a}{m}\right)}{a}$$

$$y^2 = \frac{-a^2 p}{a\,m} + \frac{a^2 p}{a\,m^2}$$

$$y^2 = \frac{a\,p}{m^2} - \frac{a\,p}{m}$$

Weil nun $m > 1$ so ist natürlich $\frac{a\,p}{m^2} < \frac{a\,p}{m}$.

Wenn

Wenn sie nun von einander abgezogen werden, bekömmt y^2 einen negativen Werth, folglich y gleich der Quadratwurzel aus einer negativen Größe, welche unmöglich, also auch die Ordinate unmöglich ist. Das erste, was zu erweisen war. Erstreckt sich die Absciße in der entgegengesetzten Richtung weiter als über den Endpunkt der Achse, so ist sie auch größer als dieselbe. Sie kann wieder durch — m a ausgedrückt werden. Also

$$y^2 = \frac{pX - ma\,(a - ma)}{a}$$

$$y^2 = \frac{-a^2 mp + a^2 m^2 p}{a}$$

$$y^2 = a m^2 p - a m p$$

$$y^2 = a p\,(m^2 - m)$$ welches allemal eine positive Zahl giebt, folglich die Wurzel von y^2 und mit ihr die Ordinate möglich macht.

§. 161. Lehrsatz. Die Hyperbel ist keine in sich zurückkehrende Linie, wie die Ellipse.

Beweis.

Wenn die Hyperbel in sich zurückkehrte, so müßte es irgend eine größte Ordinate geben; allein diese findet nicht statt, wie aus folgendem Kalkul erhellet; also ist diese Kurve nicht zurückkehrend, sondern ihre Aeste entfernen sich immer mehr und mehr von einander, wie die der Parabel. Hier ist der Kalkul

$$y^2 = \frac{px\,(a + x)}{a} = \frac{apx + px^2}{a}$$

diff. $$2ydy = \frac{apdx + 2pxdx}{a}$$

$:ay \qquad dy = \frac{apdx + 2pxdx}{2ay}$

$:dx \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{ap + 2px}{a}$

also hier $\qquad o = \frac{ap + 2px}{a}$

$Xa \qquad o = ap + 2px$

$-ap = 2px$

$:p \qquad -a = 2x$

$:2 \qquad -\frac{1}{2}a = x$, das heißt, nur dann hätte eine größte Ordinate statt, wenn die halbe negative Achse zur Abscisse werden könnte; da aber erwiesen worden, daß auf selber keine Ordinate möglich ist, so gehört eine größte Ordinate der Hyperbel unter die Undinge; folglich entfernen sich die Aeste dieser Kurve immer weiter und weiter voneinander, und zwar bis ins unendliche fort.

§. 162. **Lehrsatz.** Werden die Abscissen vom Mittelpunkte der Achse angerechnet, und ebenfalls durch v bezeichnet, so heißt die Gleichung

Satz

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$$

Beweis.

Es ist Fig. 36 $\quad ap = cp - ca$

oder $\quad x = v - \frac{1}{2}a$

Nun in der zwoten Urgleichung substituiert, giebt

$$y^2 = \frac{c^2 (v - \frac{1}{2}a)}{a} + \frac{c^2 (v - \frac{1}{2}a)^2}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{a c^2}{2a} + \frac{c^2 \left(v^2 - a v + \frac{a^2}{4}\right)}{a^2}$$

$$y^2 = \frac{c^2 v}{a} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{c^2 v}{a} + \frac{c^2}{4}$$

abgek. $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

§. 163. Zusatz. Die Ellipsengleichungen, wo Mittelpunktsabscissen eingeschoben sind, ändern also das Minuszeichen nicht; aber die Glieder müssen versetzt werden, wenn sie den Hyperbelcharakter annehmen sollen.

§. 164. Zusatz. Wir sind nun im Stande gesetzt, alle obigen 6 Ellipsengleichungen für die Hyperbel anwendbar zu machen. Hier stehen sie der Ordnung nach.

1) $$y^2 = \frac{p x (a + x)}{a}$$

2) $$y^2 = p x + \frac{p^2 x^2}{c^2}$$

3) $$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

4) $$y^2 = \frac{p v^2}{a} - \tfrac{1}{4} a p$$

5) $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

6) $$y^2 = \frac{p^2 v^2}{c^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

§. 165. Zusatz. Denkt man sich die kleine Achse ebenfalls als Abscissenlinie zu beyden Seiten fort.

fortgeführt, so würde sicher auch für die Mittelpunktsabscissen auf selber nach der Analogie die Gleichung gelten müssen $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$

§. 166. Lehrsatz. Eben so wenig als auf der großen Achse Ordinaten möglich sind, sind sie es auch auf der Querachse. Sie kann aber wohl am Ende beyderseits geschnitten werden, und auf ihrer Verlängerung Ordinaten verstatten.

Beweis.

Da die Gleichung $\Phi^2 = \frac{a^2 z^2}{c^2} - \frac{1}{4} a^2$ vom Mittelpunkte die Abscissen anrechnet, so müßte, im Fall sich auf der Querachse Ordinaten befänden, die zugehörigen Abscissen kleiner als die Hälfte derselben seyn. Nehme man daher an z sey kleiner als $\frac{1}{2}$ c z. B. $z = \frac{c}{m}$ wo $m > 2$ ist, folglich $z^2 = \frac{a^2}{m^2}$ so verwandelt sich die Gleichung in folgende

$$\Phi^2 = \frac{a^2 c^2}{m^2 c^2} - \frac{1}{4} a^2$$

$$\Phi^2 = \frac{a^2}{m^2} - \frac{a^2}{4}$$

Man sieht beym ersten Anblick, daß unter dieser Bedingung nothwendig $\frac{a^2}{m^2} < \frac{a^2}{4}$ sey: daher wäre Φ^2 nach dem Abzuge einer negativen Größe gleich, welches aber wieder eine baare mathematische Chimäre ist. Es ist also ausgemacht, daß die Ordinaten auf der Querachse keinen Platz haben. Nimmt man

man eine Abscisse auf der andern Hälfte jenseits der großen Achse, so ist, weil hier $z = -\frac{a}{m}$ und

$z^2 = \frac{a^2}{m^2}$ wie vorher, dieß eben so richtig. Das erste was zu erweisen war.

Setzt man zweytens $z = \frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ folglich $z^2 = \frac{c^2}{4}$, so gewinnt die Gleichung folgendes Ansehen

$$\phi^2 = \frac{a^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\phi^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0$$

also $\phi = 0$; das heißt in der Sprache der Algebra, die Ordinate ist an den äußern Endpunkten der Querachse so klein, daß sie sammt der krumen Linie in die Achse selbst fällt, oder was auf eins hinaus läuft, daß die Achse hier überall geschnitten wird, was zweytens zu erweisen war.

Drittens endlich soll z größer als $\frac{c}{2}$ oder $-\frac{c}{2}$ werden, z. B. $\frac{mc}{2}$ oder $-\frac{mc}{2}$, wo $m > 1$ so erscheint die verwandelte Aequation, weil $z^2 = \frac{m^2 c^2}{4}$

$$\phi^2 = \frac{a^2 m^2 c^2}{4 c^2} - \frac{a^2}{4}$$

$$\phi^2 = \frac{m^2 a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{(m^2 - 1) a^2}{4}$$

also $\phi = \frac{a}{2} \sqrt{m^2 - 1}$. Da nun die Wurzel aus $m^2 - 1$ allemal eine positive Größe ist, so

hat

hat die Ordinate einen wahren Werth. Es giebt demnach zu beyden Seiten auf der verlängerten kleinen Achse ebenfalls Ordinaten, wie auf der verlängerten großen Achse.

§. 167. Zusatz. Es lassen sich demnach bey jeder Hyperbel nicht blos 4, sondern 8 unendliche Aeste gedenken; denn es kann auch auf der Verlängerung der Querachse nirgends ein Maximum geben, wie dieß sogleich aus der differentierten Gleichung ersichtlich ist

$$2\phi\, d\phi = \frac{2a^2 z\, dz}{c^2}$$

$$:2 \qquad \phi\, d\phi = \frac{a^2 z\, dz}{c^2}$$

$$:\phi \qquad d\phi = \frac{a^2 z\, dz}{c^2 \phi}$$

$$:dz \qquad \frac{d\phi}{dz} = \frac{a^2 z}{c^2 \phi}$$

oder $$0 = \frac{a^2 z}{c^2 \phi}$$

$$\times c^2 \phi \qquad 0 = a^2 z$$

$$:a^2 \qquad 0 = z.$$

Weil nun z vom Mittelpunkte aus niemals zu Null werden kann, so ist auch hier keine größte Ordinate möglich. Alles bisher gesagte erhellet auch schon aus Fig. 38.

§. 168. Anmerk. Wenn wir wieder auf die ersten zwo ursprünglichen Hyperbeläquationen zurückkehren, so erinnern wir uns, daß weder die ganze noch die halbe Hauptachse eine Abscisse werden, und eben so wenig die halbe Querachse eine Ordinate abgeben könne. Indeß wird es jedem begreiflich scheinen, daß Abscissen und Ordinaten auf der Verlängerung der Hauptachse möglich sind, die genau obige Größe haben. Wir wollen diese Behauptung in zween Lehrsätzen vortragen.

§. 169. Lehrsatz. Jener Abscisse, die so groß ist als die halbe Hauptachse, entspricht als Ordinate die halbe kleine Achse, multiplicirt durch die Quadratwurzel aus 3.

Voraussetzung.

$$x = \tfrac{1}{2} a$$

Satz:

$$y = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}$$

Beweis.

Es ist $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$

substit. $y^2 = \frac{c^2 a}{2 a} + \frac{c^2 a^2}{4 a^2}$

abgek. $y^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4}$

noch mehr $y^2 = \frac{3 c^2}{4}$

$$y^2 = \tfrac{1}{2} c \sqrt{3}$$

§. 170. Zusatz. Ist $x = a$, so wird aus der Gleichung folgende

$$y^2 = \frac{c^2 a}{a} + \frac{c^2 a^2}{a^2}$$

$$y^2 = c^2 + c^2$$

$$y^2 = 2 c^2$$

$$\sqrt{} \quad y = c \sqrt{2}$$

§. 171. Lehrsatz. Einer Ordinate, die so groß als die halbe Querachse ist, korrespondiert eine

Mittel=

Mittelpunktsabscisse, die der Hauptachse gleicht, wenn sie durch die Wurzel aus 2 dividiert wird.

Voraussetzung.

$$y = \frac{1}{2} c$$

Satz.

$$v = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Beweis.

Es ist hier $\frac{1}{4} c^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4} c^2$

$: c^2$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$

versetzt $\quad \frac{1}{2} = \frac{v^2}{a^2}$

$\times a^2$ $\quad \frac{a^2}{2} = v^2$

$\sqrt{}$ $\quad \frac{a}{\sqrt{2}} = v$

§. 172. **Lehrsatz.** Der Brennpunkt in jeder Hyperbel ist, vom Mittelpunkt ausgerechnet, wie in der Ellipse, nur daß das Zeichen geändert vorkömmt.

Satz.

$$v = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

Beweis.

Beweis.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

aber hier ist $y = \frac{p}{2} = \frac{c^2}{2a}$ §. 73

quad. $y^2 = \frac{c^4}{4a^2}$

$$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

$: c^2$ $\frac{c^2}{4a^2} = \frac{v^2}{a^2} - \frac{1}{4}$

$\times a^2$ $\frac{c^2}{4} = v^2 - \frac{a^2}{4}$

versetzt $\frac{a^2 + c^2}{4} = v^2$

$\surd$ $\frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = v$

§. 173. Zusatz. Die übrigen gleichgültigen Ausdrücke für die Brennweite lassen sich eben so leicht nach den Regeln der Konversion bestimmen; wenn sie ehevor von der Ellipse entlehnt worden.

§. 174. Erkl. Jene Hyperbel, derer große und kleine Achse gleich sind, heißt eine gleichseitige Hyperbel.

§. 175. Zus. Die Gleichung $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$ verändert sich demnach für die gleichseitige Hyperbel in diese $y^2 = \frac{a^2 x}{a} + \frac{a^2 x^2}{a^2}$

$y^2 = ax + x^2$, welche mit verkehrtem Zeichen die des Zirkels ist. §. 176.

§. 176. Zusatz. Die Brennweite ist daher in der gleichseitigen Hyperbel $\frac{\sqrt{2a^2}}{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

§. 177. Aufgabe. In jeder Hyperbel die Brennweite und den Parameter durch Zeichnung sinnlich zu machen.

Auflösung. Man trage die halbe Querachse rechtwinklicht auf den Endpunkt der Hauptachse und ziehe die Hypothenuse. Mit dieser Hypothenuse nun beschreibe man aus dem Mittelpunkte der Hauptachse einen Bogen durch die Hyperbel, so wird er gerade die Abscissenlinie im Brennpunkte schneiden. Denn ich erweise daß Fig. 39

$$cF = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} \text{ sey.}$$

Beweis.

$$cg^2 = cb^2 + bg^2$$

Aber $cg = cF$, $cb = \frac{1}{2}a$ und $bg = \frac{1}{2}c$

folgl. $cF^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 = \frac{a^2 + c^2}{4}$

$\sqrt{}$ $cF = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Wird nun auf dem Brennpunkte eine Doppelordinate errichtet, so ist eben darum auch der Parameter der Hyperbel sichtbar.

§. 178. Lehrsatz. Die Differenz zweener Brennstrahlen, die in der Kurve einen Winkel machen, ist in jeder Hyperbel der Hauptachse gleich.

Satz. Fig. 40.

$$mf - mF = a$$

Beweis.

Wenn von jenem Punkt der Hyperbel, wo die beyden Brennstrahlen zusamm laufen, eine Ordinate ausgezogen wird, so ist

I $fm^2 = fp^2 + pm^2$

aber $fp = fa + ap$

oder $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2} + v$

und $fp^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2 + c^2} + v^2$

so wie $pm^2 = \frac{v^2 c^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

Nun subst. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + v\sqrt{a^2+c^2} + v^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek. $fm^2 = \frac{1}{4}a^2 + v\sqrt{a^2 + c^2} + v^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2}$

$\sqrt{}$ $fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

II Es ist auch eben so richtig, daß

$Fm^2 = Fp^2 + pm^2$

Allein $Fp = ap - aF$

oder $= v - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$

Folgl. $Fp^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$

Substit. $Fm^2 = v^2 - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$

abgek.

abgek. $Fm^2 = \frac{v^2 + c^2 v^2}{a^2} - v\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2$

$\sqrt{}$ $Fm = \frac{1}{2}a - \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

oder auch $Fm = \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2} - \frac{1}{2}a$ nach der Würdenlehre.

Nun ist nach Nro I $fm = \frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c^2}$

Hier nach Nro II $Fm = -\frac{1}{2}a + \frac{v}{a}\sqrt{a^2 + c}$

$- \quad + \quad -$

$fm - Fm = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$

§. 179. Aufgabe. Eine Hyperbel zu zeichnen.

Auflösung und Beweis. Man ziehe eine unbestimmte gerade Linie, schneide die Hauptachse davon ab, und bestimme zwo gleiche Brennweiten. Man nehme nun immer eine beträchtlich größere Zirkelöfnung als die Hauptachse ist, und beschreibe aus einem der Brennpunkte einen Bogen, und durchschneide ihn mit einer andern Oefnung, welche ausdrückt, um wie viel die vorige größer als die Achse war, so wird der Durchschnittspunkt in der Hyperbel liegen; weil hier $fm - Fm = a$ seyn muß. Wiederholt man diese Methode mit andern Zirkelöfnungen dieser Art, so werden auch eben darum mehr Punkte von dieser Kurve bestimmt werden.

§. 180. **Aufgabe.** Die Tangente der Hyperbel zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe auf jenen Punkt, wodurch die Tangente gehen soll, zween Brennstrahlen zusamm, und theile den Winkel, welchen sie mit einander bilden, in zween gleiche Theile, so wird

die

die Theilungslinie die verlangte Tangente seyn. Denn es liegt weder oberhalb noch unterhalb ein Punkt dieser Tangente mehr in der Kurve.

Beweis.

Man mache Fig. 41 $dm = Fm$

folglich ist $fd = fm - Fm = ab$

Es ist ferner $Fg = gd$

$gc = gc$

und $o = x$

also $\triangle Fgc \cong \triangle gcd$ und eben darum

$Fc = dc$

Nun ist $fc < fd + dc$

substit. $fc < ab + Fc$

$$\frac{\begin{array}{ll} fc < ab + Fc \\ -Fc \quad\quad -Fc \end{array}}{fc - Fc < ab}$$

$fc - Fc < ab$; daher c kein Punkt der Hyperbel.

Eben so wenig n; denn es läßt sich auf die nämliche Art erweisen, daß $Fn = dn$

Nun ist aber $fn < fd + dn$

substit. $fn < ab + Fn$

$$\frac{\begin{array}{ll} fn < ab + Fn \\ -Fn \quad\quad -Fn \end{array}}{fn - Fn < ab}$$

$fn - Fn < ab$, was zu erhärten war.

§. 181. Zusatz. Verlängert man einen der Brennstrahlen, so werden die Winkel, welche sie auf der Tangente gestalten, vollkommen einander gleich seyn; der Beweis ist gerade wie bey der Ellipse.

§. 182. Anmerk. Die Akustik und vorzüglich die Katoptrik weiß von der Hyperbel wegen der Gleichheit der Brennstrahlwinkel ebenfalls wichtigen Gebrauch zu machen. Die Sache setzt zu viele Theorie dieser physischen Artikel voraus, als daß wir uns dießorts hierüber näher erklären könnten.

§. 183. Lehrsatz. Es läßt sich nach aller geometrischer Strenge erweisen, daß die Assymtoten, obwohl sie immer den Hyperbelästen näher und näher kommen, doch mit selben nie zusamm fallen. Denn wenn man von ein und dem nämlichen Punkte der Abscissenlinie sowohl auf die Hyperbelschenkel als auf die daranliegende Assymtote Ordinaten zieht, so giebt die Differenz dieser quadrierten Ordinaten in jedem Falle eine beständige Größe, nämlich den 4ten Theil des Quadrats der Querachse.

Satz.

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4} c^2$, wo z die Ordinate auf die Assymtote vorstellet.

Beweis. Fig. 42

$$ca : da = cp : rp$$

subst. $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

$\times 2$ $a : c = (x + \frac{1}{2}a) : z$

$$az = cx + \frac{1}{2}ac$$

quad. $a^2 z^2 = c^2 x^2 + ac^2 x + \frac{1}{4}a^2 c^2$

$:a^2$ $z^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a} + \frac{1}{4}c^2$

aber $y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2} + \frac{c^2 x}{a}$

$$- \quad - \quad -$$

$$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$$

§. 184. Zusatz. Da dieß zu beyden Seiten der Hyperbel wahr ist, so folgt auch, daß die Differenzen dieser Ordinaten selbst beyderseits gleich sind; denn wenn

z^2

$$z^2 - y^2 = \frac{1}{4} c^2$$

so ist auch $Z^2 - Y^2 = \frac{1}{4} c^2$ von der andern Seite

also $z^2 - y^2 = Z^2 - Y^2$

aber $-y^2 = -Y^2$

$$z^2 = Z^2$$

$\surd$ $z = Z$

Da nun $-y = -Y$

$$z - y = Z - Y$$

§. 185. Zusatz. Weil ein solches Stück zwischen dem Hyperbelschenkel und der Assymtote durch $z - y$ und das übrige Stück der grossen Doppelordinate $2z$ durch $z + y$ ausgedrückt werden kann, so giebt auch das Produkt aus diesen zwoen Segmenten $z^2 - y^2$ mehrmals $\frac{1}{4} c^2$

§. 186. Erkl. Wenn mit den Assymtoten aus dem Scheitelpunkt der Hyperbel ein Parallelogram ergänzt wird, so heißt eine solche Seite die Potenz der Hyperbel.

§. 187. Lehrsatz. Die Potenz der Hyperbel ist gleich den 4ten Theil der Quadratwurzel aus der Summe der beyden quadrierten Achsen. Wenn daher b die Potenz ausdrückt, so heißt der

Satz.

$$b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$$

Beweis. Fig. 43.

$z = y$ wegen Parallelismus

$z = s$ wegen gleichschenklichten Δ

also $y = s$ und deßwegen gh

$$gh = dg = b$$

Ferner $r = m$

$o = m$

also $o = r$ und daher auch

$$fg = dg = b$$

Aber $fg + gh = fh$

substit. $b + b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$

$$2b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$$

:2 $b = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$

§. 188. **Lehrsatz.** Wenn von einem Punkt der Kurve auf die Assymtote eine Parallellinie mit der Potenz der Hyperbel gezogen, und für eine Ordinate $= \mu$, so wie das vom Mittelpunkt aus abgeschnittne Stück der Assymtote selbst für ihre Abscisse $= \zeta$ angenommen wird, so heißt die Gleichung zwischen der Hyperbel und den Assymtoten $b^2 = \mu\zeta$

Beweis. Fig. 44

Man ziehe von jenem Endpunkt einer solchen Ordinate, der in der Kurve liegt, eine Linie mit der nächsten Assymtote parallel, bis hin zur andern Assymtote und nenne einsweilen das Stück $z - y = m$ so ist

I $qk : nq = cd : gd$

$$m : \mu = \tfrac{1}{2}c : gd$$

$$m \times gd = \frac{c\mu}{2}$$

gd

$$gd = \frac{c\mu}{2m}$$

aber $gd = b$

also $b = \frac{c\mu}{2m}$

und $b^2 = \frac{c^2\mu^2}{4m^2}$

Weil aber $(z - y)(z + y) = \frac{1}{4}c^2$ nach §. 185.

substit. $m \times qr = \frac{1}{4}c^2$

und $qr = \frac{c^2}{4m}$

so gilt in II $cd : gd = qr : qf$ oder nh

die Subst. $\frac{c}{2} : \frac{c\mu}{2m} = \frac{c^2}{4m} : \zeta$

$$\frac{c^3\mu}{8m^2} = \frac{c\zeta}{2}$$

$:c$ $\frac{c^2\mu}{8m^2} = \frac{\zeta}{2}$

$\times 2$ $\frac{c^2\mu}{4m^2} = \zeta$

$\times \mu$ $\frac{c^2\mu^2}{4m^2} = \mu\zeta$

Allein es ist $\frac{c^2\mu^2}{4m^2} = b^2$

Folglich $b^2 = \mu\zeta$

§. 189. **Aufgabe.** Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.

Auflösung. Man setze zwo gerade Linien unter einen rechten Winkel zusamm, bestimme die Potenz, wenn sie nicht etwa gegeben ist, nach Will-

kühr

führ verlängere zwo Seiten parallel mit den Assymtoten, und beschreibe etliche Halbkreise auf eben diese Assymtoten, die sich alle im rechten Winkel anfangen. Da nun, wo die Parallellen vom Kreise geschnitten worden, fälle man Perpendikel auf den Diameter herab, setze den Handzirkel auf dem Endpunkt des Perpendikels ein, und durchschneide selben mit dem kleinern Segment des Diameters, so wird ein solcher Durchschnittspunkt in der gleichseitigen Hyperbel liegen.

Beweis.

$fg^2 = af \times fl$

Aber $fg = aq = b$

$af = \zeta$

und $fl = fm = \mu$

Substit. $b^2 = \zeta\mu$. Folglich, weil dieß auch bey kn, und andern Ordinaten statt hat, ist die Hyperbel zwischen den Assymtoten richtig beschrieben. Daß sie aber gleichseitig sey, rühret daher, weil der rechte Winkel a durch die Achse in zween gleiche Theil getheilt worden, wo demnach $o = x = 45°$ folglich das rechtwinklichte Dreyeck afb gleichschenklicht seyn muß, das heißt, nothwendig $bf = ab$ oder $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a$ ist.

§. 190. Aufgabe. Die Tangente, Subtangente, Normal und Subnormal bey der Hyperbel zu bestimmen.

Auflösung. Es wäre überflüßig uns hier wiederum den mühsamen Rechnungen zu unterziehen. Sie sind die nämlichen, wie bey der Ellipse, wenn man ausnimmt, daß die Minuszeichen zuvor überall in Pluszeichen verwandelt werden müssen, im Fall die

Achsengleichung $y^2 = \frac{a c^2 x + c^2 x^2}{a^2}$ auch hier zum Grunde gelegt wird. Es ist diesem zufolge

1) T. $= \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^2c^2+4x(a^3+a^2x+ac^2+c^2x))}}{a(a+2x)}$

2) Subt. $= \frac{2x(a+x)}{a+2x}$

3) Norm. $= \frac{\sqrt{a^2c^2+4x(a^3c+c^2a^2x+ac^3+c^4x}}{2a^2}$

4) Subnorm. $= \frac{c^2(a+2x)}{2a^2}$

§. 191. **Zusatz.** Setzt man in diesen Formeln $c = a$, so erhält man selbe für die gleichseitige

1) Tang. $= \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^4+4x(a^3+a^2x+a^3+a^2x))}}{a(a+2x)}$

$= \frac{a\sqrt{(ax+x^2)(a^2+4x(a+x+a+x))}}{a(a+2x)}$

$= \frac{\sqrt{(ax+x^2)(a^2+4x(2a+2x)}}{a+2x}$

2) Norm. $= \frac{\sqrt{a^4+4x(a^4+a^4x+a^4+a^4x)}}{2a^2}$

$= \frac{2a^2\sqrt{\frac{1}{4}+x(1+x+1+x)}}{2a^2}$

$= \sqrt{2x^2+2x+\frac{1}{4}}$

3) Subnorm. $= \frac{a^2(a+2x)}{2a^2}$

$= \frac{a+2x}{2}$

$= x+\frac{1}{2}a$

§. 192.

§. 192. Aufgabe. Eine Hyperbel rektificieren.

Auflösung. Nehmen wir die Gleichung der Mittelpunktsabscissen vor uns, so geht die Arbeit doch Anfangs einigermassen parallel mit der Rektifikation der Ellipse.

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2$$

diff. $$2 y d y = \frac{2 c^2 v d v}{a^2}$$

:2 $$y d y = \frac{c^2 v d v}{a^2}$$

quad. $$y^2 d y^2 = \frac{c^4 v^2 d v^2}{a^4}$$

div. durch $$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 = \frac{4 c^2 v^2 - a^2 c^2}{4 a^2}$$

$$d y^2 = \frac{c^4 v^2 d v^2}{a^4} \times \frac{4 a^2}{4 c^2 v^2 - a^2 c^2} = \frac{4 a^2 c^4 v^2 d v^2}{4 a^4 c^2 v^2 - a^6 c^2}$$

den Bruch verkl. $dy^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$

$$\underline{\quad + dv^2 \qquad\qquad + dv^2 \quad}$$

$$dy^2 + dv^2 = \frac{4c^2v^2dv^2}{4a^2v^2 - a^4} + dv^2$$

$$= \frac{4c^2v^2dv^2 + 4a^2v^2dv^2 - a^4dv^2}{4a^2v^2 - a^4}$$

$$= \frac{dv^2}{a^2}\left(\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}\right)$$

$$\sqrt{(dy^2 + dv^2)} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{4(a^2 + c^2)v^2 - a^4}{4v^2 - a^2}}$$

Setzt man hier mehrmals $4(a^2 + c^2) = m$, so entsteht

$$\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{mv^2 - a^4}{4v^2 - a^2}} \text{ oder } = \frac{dv}{a}\sqrt{\frac{a^4 - mv^2}{a^2 - 4v^2}}$$

Weil aber nach §. 126 $\sqrt{a^4 - m v^2} = a^2 - \frac{m v^2}{2 a^2} - \frac{m^2 v^4}{8 a^6} - \frac{m^3 v^6}{16 a^{10}} \ldots$

Und $\sqrt{a^2 - 4 v^2} = a - \frac{2 v^2}{a} - \frac{2 v^4}{a^3} - \frac{4 v^6}{a^5}$

so läßt sich noch vor der Division statt

$$m = 4 a^2 + 4 c^2$$

$$m^2 = 16 a^4 + 32 a^2 c^2 + 16 c^4$$

und $m^3 = 64 a^6 + 192 a^4 c^2 + 192 a^2 c^4 + 64 c^4$ im Zähler substituieren.

Man bekömmt nach der Abkürzung zum Dividend:

$$a^2 - 2 v^2 - \frac{2 c^2 v^2}{a^2} - \frac{2 v^2}{2 a^2} - \frac{4 c^2 v^4}{a^4} - \frac{2 c^4 v^4}{a^6} - \frac{4 v^6}{a^4} - \frac{12 c^2 v^6}{a^6} - \frac{12 c^4 v^6}{a^8} \ldots$$

Der Quotus hingegen selbst ist

$$a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots$$

Deßwegen $\sqrt{d v^2 + d y^2} = \frac{d v}{a} \left(a - \frac{2 c^2 v^2}{a^3} - \frac{8 c^2 v^4}{a^5} + \frac{2 c^4 v^4}{a^7} \ldots \right)$

$$= d v - \frac{2 c^2 v^2 d v}{a^4} - \frac{8 c^2 v^4 d v}{a^6} + \frac{2 c^4 v^4 d v}{a^8} \ldots$$

$$S\left(\sqrt{dv^2 + dy^2}\right) = v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} - \frac{8c^2v^5}{5a^6} + \frac{2c^4v^5}{5a^8}$$

oder $$= v - \frac{2c^2v^3}{3a^4} + \left(\frac{2c^4 - 8a^2c^2}{5a^8}\right)v^5 \ldots\ldots$$

§. 193. Zusatz. Ist die Hyperbel gleichseitig, das heißt, wird $c = a$, so giebt die Reihe $= v - \frac{2a^2v^3}{3a^4} + \frac{(2a^4 - 8a^4)v^5}{5a^8} \ldots\ldots$

abgek. $= v - \frac{2v^3}{3a^2} - \frac{6v^5}{5a^4} \ldots\ldots$

Woraus man offenbar sieht, daß diese Reihe bey großen Hyperbelbögen nicht gebraucht werden kann; denn weil in solchen Fällen $v > a$, so müssen die hintern Glieder immer größer und größer werden, und lassen sich am Ende gar nicht mehr vom ersten positiven Gliede abziehen. Es ist daher besser, wenn man die Fraktion $-\frac{mv^2 - a^4}{4v^2 - a^2}$ ungeändert läßt, und so in dieser Gestalt aus Zähler und Nenner die Wurzel zieht.

Es ist aber $(m v^2 - a^4)^{\frac{1}{2}} = (m v^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(m v^3)^{-\frac{1}{2}} \times -a^4 + \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(m v^2)^{-\frac{3}{2}} \times + a^8 =$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(m v^2)^{-\frac{5}{2}} \times - a^{12} \ldots$$

Abgek. $= m^{\frac{1}{2}} v - \frac{a^4}{2 m^{\frac{1}{2}} v} - \frac{a^8}{8 m^{\frac{3}{2}} v^3} - \frac{a^{12}}{16 m^{\frac{5}{2}} v^5} \ldots$

Ferner ist $(4 v^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} = (4 v^3)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(4 v^2)^{-\frac{1}{2}} \times - a^2 + \frac{\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}}{1 \times 2}(4 v^2)^{-\frac{3}{2}} \times + a^4 =$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2}}{1 \times 2 \times 3}(4 v^2)^{-\frac{5}{2}} \times - a^6 \ldots$$

Abgek. $2 v - \frac{a^2}{2 \times 4^{\frac{1}{2}} v} - \frac{a^4}{8 \times 4^{\frac{3}{2}} v^3} - \frac{a^6}{16 \times 4^{\frac{5}{2}} v^5} \ldots$

Noch mehr, giebt $2 v - \frac{a^2}{4 v} - \frac{a^4}{64 v^3} - \frac{a^6}{512 v^5} \ldots$

Der

Der Quotus davon ist:

$$\frac{m^{\frac{1}{2}}}{2}+\frac{m^{\frac{1}{2}}a^2}{16\,v^2}+\frac{3\,m^{\frac{1}{2}}a^4}{256\,v^4}+\frac{5\,m^{\frac{1}{2}}a^6}{2048\,v^6}-\ldots$$

$$-\frac{a^4}{4m^{\frac{1}{2}}v^2}-\frac{a^6}{32\,m^{\frac{1}{2}}v^4}\ldots$$

Diese Reihe durch $\frac{dv}{a}$ multipliciert, so erscheint die obige Gleichung wieder in andern Ausdrücken

$$\sqrt{dv^2+dy^2}=\frac{m^{\frac{1}{2}}dv}{2a}+\frac{m^{\frac{1}{2}}a^2\,dv}{16\,a\,v^2}-\frac{a^4\,dv}{4\,m^{\frac{1}{2}}\,a\,v^2}+\frac{3\,m^{\frac{1}{2}}a^4\,dv}{256\,a\,v^4}-\frac{a^6\,dv}{32\,m^{\frac{1}{2}}\,a\,v^4},$$

$$+\frac{5\,m^{\frac{1}{2}}a^6\,dv}{2048\,m^{\frac{1}{2}}\,a\,v^6}\ldots$$

abgekürzt, und anderst ausgedrückt, giebt

Folgl. $$\frac{m^{\frac{1}{2}}dv}{2a}+\frac{m^{\frac{1}{2}}a\,v^{-2}\,dv}{16}-\frac{a^3\,v^{-2}\,dv}{4\,m^{\frac{1}{2}}}+\frac{3\,m^{\frac{1}{2}}a^3v^{-4}\,dv}{256}-\frac{a^5\,v^{-4}\,dv}{32\,m^{\frac{1}{2}}}+\frac{5m^{\frac{1}{2}}a^5\,v^{-6}\,dv}{2048}\ldots$$

Folgl. $S\left(\sqrt{dy^2+dv^2}\right) = \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} + \frac{m^{\frac{1}{2}}a\,v^{-1}}{-16} - \frac{a^3 v^{-1}}{-4\,m^{\frac{1}{2}}} + \frac{3\,m^{\frac{1}{2}}a^3\,v^{-3}}{-3 \times 256}$

$- \frac{a^5 v^{-3}}{-3 \times 32\,m^{\frac{1}{2}}} + \frac{5\,m^{\frac{1}{2}}a^5 v^{-5}}{-5 \times 2048} \ldots$

Abgek. $= \frac{m^{\frac{1}{2}}v}{2a} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a}{16v} + \frac{a^3}{4\,m^{\frac{1}{2}}v} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^3}{256v^3} + \frac{a^5}{96\,m^{\frac{1}{2}}v^3} - \frac{m^{\frac{1}{2}}a^5}{2048\,v^5} \ldots$

Weil nun $m = 4(a^2+c^2)$, und $m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2+c^2}$ ist, so kann überall in der Reihe substituiert werden; und ein rektificierter Hyperbelast wird demnach seyn:

$\frac{v\sqrt{a^2+c^2}}{a} - \frac{a\sqrt{a^2+c^2}}{8v} + \frac{a^3}{8v\sqrt{a^2+c^2}} - \frac{a^3\sqrt{a^2+c^2}}{128\,v^3} + \frac{a^5}{192\,v^3\sqrt{a^2+c}}$

$- \frac{a^5\sqrt{a^2+c^2}}{1024\,v^5} \ldots$

§. 194. Zusatz. Dieser Formel zufolge, wäre der Ausdruck für die gleichseitige Hyperbel, weil $\sqrt{a^2+c^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, folgender:

$$\frac{a v \sqrt{2}}{a} - \frac{a^2 \sqrt{2}}{8 v} + \frac{a^3}{8 a v \sqrt{2}} - \frac{a^4 \sqrt{2}}{128 v^3} + \frac{a^5}{192 a v^3 \sqrt{2}} - \frac{a^6 \sqrt{2}}{1024 v^5} \ldots;$$

und abgek. $= v\sqrt{2} - \frac{a^2 \sqrt{2}}{8 v} + \frac{a^2}{8 v \sqrt{2}} - \frac{2^4 \sqrt{2}}{128 v^3} + \frac{a^4}{192 v^3 \sqrt{2}} - \frac{a^6 \sqrt{2}}{1024 v^5} \ldots$

oder auch $v\sqrt{2} + \left(\frac{a^2}{8 v} + \frac{a^4}{192 v^3} \ldots\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{a^2}{8 v} + \frac{a^4}{128 v^3} \ldots\right) \times \sqrt{2}.$

§. 195. **Anmerk.** Ein Exempel hierüber zur Versinnlichung. Vor einem Sommerpallaste soll zu beyden Seiten eine Baumallee in Form einer gleichseitigen Hyperbel angelegt werden, dessen Hauptachse 120′ beträgt; wie viel hat man Bäume nöthig, wenn sie in der äußern Reihe 12 Schuh von einander entfernt werden. und ihre senkrechte Länge d. i. die Absciße 80 Fuß gerechnet werden darf?

Auflösung. Da bey jeder Allee die Seitenreihen gleich viele Bäume haben, so suche man den äußersten Hyperbelschenkel in Schuhen, dividiere ihn durch 12 und nehme den Quotus viermal; oder was eines ist, man dividiere den gefundnen Schenkel durch drey, so erhält man die verlangte Anzahl von Bäumen.

Es ist hier $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$

Folgl.

Folglich die Reihe

$$= 140\sqrt{2} + \left(\frac{120^2}{8 \times 140} + \frac{120^4}{192 \times 140^3}\right) : \sqrt{2} - \left(\frac{120^2}{8 \times 140} + \frac{120^4}{128 \times 140^3}\right) \times \sqrt{2}$$

$$= 140 \times 1{,}414 + \left(\frac{14400}{1120} + \frac{207360000}{526848000}\right) : \sqrt{2}\left(\frac{14400}{11200} + \text{u. s. f.}\right.$$

= 198 Schuhe ungefähr, weil die zwo letzten eingeklammerten Glieder fast kaum jede eine Einheit beträgt, und daher angesehen werden dörfen, als wenn sie sich völlig einander aufheben. Nun giebt 198 : 3 = 66 Bäume für die ganze Allee.

§. 196. **Anmerk.** Die Quadratur der Hyperbel, so wie die Bestimmung der Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels muß hier wegen den logarithmischen Differentialien, die sich mit in die Reihen mengen, bis auf tiefer unten verschoben werden, wo ohnehin die Logistik, von der wir oben in der Parabel §. 40 Meldung thaten, in Kürze abgehandelt werden soll. Wir wollen demnach den Artikel von der Hyperbel mit der Kubatur des dahin gehörigen Kegels einsweilen schließen.

§. 197. **Aufgabe.** Jene Körper, die durch Umwälzung einer Hyperbel erzeugt werden, zu kubieren.

Auflösung. Wie wir bey der Elliptoide uns der Aequation $y^2 = c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a^2}$ bedienten, so nehmen wir auch hier wieder ihre gleichförmige vor uns.

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times \pi dx \quad \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x dx}{a} + \frac{c^2 x^2 dx}{a^2} \right)$$

$$S(\pi y^2 dx = \pi \left(\frac{c^2 x^2}{2a} + \frac{c^2 x^3}{3a^2} \right)$$

oder $= \pi \left(\frac{3ac^2x^2 + 2c^2x^3}{6a^2} \right) = \frac{\pi c^2 x^2}{6a^2}(3a + 2x)$

§. 198. Zusatz. Sähe man etwa gerne, daß sich statt der kleinen Achse lieber die Ordinate in der Formel befände, so suche man einen Werth für c^2 aus der Gleichung folgender Gestalt

$$y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2} = \frac{ac^2 x + c^2 x^2}{a^2}$$

$$\times a^2 \quad a^2 y^2 = ac^2 x + c^2 x^2 = c^2 (ax + x^2)$$

$$\frac{a^2 y^2}{ax + x^2} = c^2$$

Diesen Ausdruck nun statt c^2 substituiert, giebt

$$\text{Solid.} = \frac{\pi a^2 y^2 x^2}{6a^2 (ax + x^2)}(3a + 2x)$$

$$= \frac{\pi y^2 x^2}{6(ax + x^2)}(3a + 2x) = \frac{\pi y^2 x (3a + 2x)}{6(a + x)}$$

§. 199. Zusatz. Ist die Rede von einer gleichseitigen Hyperbel, so verwandelt sich der erste Ausdruck in $\frac{\pi x^2}{6}(3a + 2x)$ und der andere, oder

$\frac{\pi y^2 x^2}{6(ax + x^2)} \times (3a + 2x)$, weil $y^2 = ax + x^2$,

in diesen $\frac{\pi x (ax + x^2)}{6(a + x)}(3a + 2x) = \frac{\pi x^2 (3a + 2x)}{6}$

§. 200.

§. 200. Anmerk. Da fast jede Speiseschüssel eine Hyperboloide vorstellt, so kann auch der Inhalt einer darinn befindlichen Masse so ziemlich berechnet werden. Es geschah einst auf einem meteorologischen Observatorium, daß man, weil das eigentliche Behältniß zu Grunde gegangen war, ein schüsselförmiges Gefäß dem Regen aussetzen mußte. Beym Ende desselben fand sich, daß das Wasser in selbem 6 Zoll hoch stand. Wenn nun dieß eine gleichseitige Hyperboloide ist, deren Achse 10 Zoll hat, und die oberste Randesweite 20 Zoll beträgt, wie hoch darf dießmal das Regenwasser in die Ephemeriden eingetragen werden?

Auflösung. Man finde zuerst den kubischen Inhalt, und verwandle ihn in einen Zylinder, dessen Basis 20 Zoll zum Diameter hat, so ist eben darum die Höhe des Wassers auf jenem Platze gefunden, auf welchen es eigentlich geregnet hatte.

Also $\frac{3,14 \times 6^2 (3 \times 20 + 2 \times 6)}{6} = 3,14 \times 6 (60 + 12)$

$= 3,14 \times 6 \times 72 = 1356,48$ Zoll.

Weil nun die Randesfläche $\frac{20^2 \times 314}{4}$ ist, so gilt die Gleichung für den Wasserzylinder, dessen Höhe unbekannt ist

$$\frac{20^2 \times 3,14\,x}{4} = 1356,48$$

$$100 \times 3,14\,x = 1356,48$$

$$3,14\,x = 1356,48$$

$$x = \frac{1356,48}{314} = 4,32 \text{ Zoll Höhe.}$$

Von der Logistik, oder der logarithmischen Linie.

§. 201. Erkl. Wenn eine gerade Linie von unbestimmter Länge irgendwo gezogen und in gleiche

Theile

Theile eingetheilet wird; wenn ferner auf den Abtheilungspunkten Perpendikl errichtet werden, deren Länge in geometrischer Proportion zunehmen, und wenn man endlich durch die Endpunkte dieser Ordinaten eine Linie führt, so heißt eine solche Linie **Logistik** oder logarithmische **Linie**.

§. 202. **Zusatz.** Da die Abscissen fortgehen, wie 1, 2, 3 u. s. f. Die Ordinaten hingegen wie 1, 2, 4, 8; oder wie 1, 3, 9 u. d. gl. so ist es ausgemacht daß jede Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate sey.

§. 203. **Zusatz.** Weil zwischen einer geometrischen und arithmetischen Proportion sich nicht wohl eine Gleichung in endlichen Größen anstellen läßt, so muß die Zuflucht zum Unendlichkleinen d. i. zu den Differentialen genommen werden.

§. 204. **Lehrsatz.** Zieht man zu zwo Ordinaten zwo gleich weit entfernte unendlich nahe Parallelinien, so verhalten sich die Differentialen dieser Ordinaten, wie die Ordinaten selbst.

Beweis.

$MP : mp = NQ : nq$ oder

aber $MP : (mp - MP) = NQ : (nq - NQ)$

oder $y : dy = Y : dY$

§. 205. **Zusatz.** Indem jedes Verhältniß durch Zuziehung einer beständigen Größe, wie wir es bey den Kegelschnitten erfuhren, in eine Gleichung verwandelt werden kann, so wird, wenn die beständige Größe $= p$, und die neue Funktion das Differential der Abscisse $= dx$, die Gleichung so heissen müssen.

$$y : dy = p : dx$$
$$y = \frac{pdy}{dx}$$

§. 206. **Lehrsatz.** Der Parameter der Logistik ist gleich ihrer Subtangente.

Satz.

$$p = \text{Subtang.}$$

Beweis.

$$y = \frac{pdy}{dx}$$

$\times dx$ $$ydx = pdy$$

$: dy$ $$\frac{ydx}{dy} = p$$

aber $$\frac{ydx}{dy} = \text{Subtang.}$$

$$p = \text{Subtang.}$$

§. 207. **Zusatz.** Es ist also die Subtangente der Logistik für jeden Punkt derselben beständig, so wie die Subnormal der Parabel.

§. 208. **Zusatz.** Nimmt man die Subtangente, oder den Parameter = 1 an, so wird

$$\frac{ydx}{dy} = 1$$
$$ydx = dy$$
$$dx = \frac{dy}{y} = y^{-1}dy$$

Folg.

Folglich ist das Differential, welches die Urgröße mit einer negativen Einheitpotenz vor sich hat, dem Abscissendifferential der Logistik gleich. Da nun dx als Differential der Abscisse zugehört, und die Abscisse der Logarithm ihrer Ordinate ist, so muß

$$S(y^{-1}dy) \text{ oder } S\left(\frac{dy}{y}\right) = x = \text{Log. } y \text{ seyn.}$$

Denn würde man einen solchen Ausdruck nach den gemeinen Regeln integrieren, so gäbe er etwas Unendliches, welches verräth, daß man anders zu verfahren habe. Indeß ist dieß doch nichts weniger als ein Ausnahm in der Mathematik. $\frac{x^0}{0}$ ist eine beständige Größe; folglich hat sie kein Differential: demohngeachtet nimmt selbe obige Gestalt an, wenn sie differentiert wird; weil $\frac{0 \times x^{-1} \times dx}{0} = x^{-1}dx$ ist, daher kann $S(x^{-1}dx)$ nicht eigentlich dem $\frac{x^0}{0}$ gleich seyn, und muß zu andern Regeln die Zuflucht genommen werden.

§. 209. **Aufgabe.** Man soll den Werth von x oder von $S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y$ bestimmen, das heißt, den natürlichen Logarithm für jede Zahl finden.

Auflösung. Setze man I $y = 1 - z$, so ist

$$dy = -dz$$

div. durch $y = 1 - z$

$$y^{-1}dy = \frac{-dz}{1-z} = -dz - zdz - z^2dz$$

$$-z^3dz \ldots$$

S

$$S(y^{-1}dy) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

aber $$S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y = \text{Log. }(1 - z)$$

$$\text{Log}(1 - z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

Es sey II $$y = 1 + z$$

folglich $$dy = dz$$

wieder div. durch $$y = 1 + z$$

$$y^{-1}dy = \frac{dz}{1+z} = dz - z\,dz + z^2\,dz - z^3\,dz \ldots.$$

und $$S(y^{-1}dy) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.$$

allein $$S(y^{-1}dy) = \text{Log. } y = L(1 + z)$$

Also $$\text{Log. }(1 + z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 - \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$$

und Nro I $$\text{Log. }(1 - z) = -z - \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.$$

$$+ \quad + \quad + \quad +$$

$$\text{Log. }(1 + z) - \text{Log. }(1 - z) = L\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2z + \tfrac{2}{3}z^3 - \tfrac{2}{5}z^5 \ldots.$$

oder $$= 2\left(z + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{5}z^5 \ldots.\right)$$

Setzt man z. B. $z = \frac{1}{5}$, so ist $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = 6 : 4 = \frac{3}{2}$

Ist hingegen $z = \frac{1}{7}$, so wird $\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{8}{7} : \frac{6}{7} = 8 : 6 = \frac{4}{3}$

Nun ist $\text{Log.}\,\frac{3}{2} + \text{Log.}\,\frac{4}{3} = \text{Log.}\,\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \text{Log.}\,\frac{12}{6} = \text{Log.}\,2.$
Es dürfen demnach nur die Logarithm von $\frac{3}{2}$ und $\frac{4}{3}$ nach der obigen Reihe bestimmt werden, so muß ihre Summe der natürliche Logarithm von der Zahl 2 seyn.

$$\text{Log.}\,\frac{3}{2} = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^5 \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \times 125} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{75}{375} + \frac{1}{375} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{77}{375} - \frac{1}{15625} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{1203125 - 375}{5859375} \ldots.\right)$$

$$= 2\left(\frac{1202750}{5859375} \ldots.\right) = \frac{2405506}{5859375} = 0{,}41$$

Ferner $\text{Log.}\,\frac{4}{3} = 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^3 \ldots\right)$

$$= 2\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{1029} \ldots\right)$$

$$= 2\left(\frac{147 + 1}{7029}\right) = 2\left(\frac{148}{1029}\right) = \frac{296}{1029} = 0{,}2876$$

Folglich $\text{Log.}\,2 = \text{Log.}\,\frac{3}{2} + \text{Log.}\,\frac{4}{3} = 0{,}41 + 0{,}28 = 0{,}69$

§. 209. **Anmerk.** Wollte man diesen Logarithm mit mehr Decimalen berechnet wissen, so dörfte nur die Reihe etwas länger fortgeführt, und die Division durch einen größern Quotus verfolgt werden. Uebrigens ist die Arbeit, natürliche Logarithmen zu finden, ungleich leichter als die Berechnung der dekadischen des Briggs.

§. 210. **Anmerk.** Hr. Wolfram, Artillerielieutenant in den vereinigten Niederlanden wiedmete ganzer sechs Jahre der Berechnung dieser natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen, und machte sich daher um die höhere Mathematik höchst verdient, weil diese Logarithmen vorzüglich gute Dienste bey schwerern Integrationen leisten. Sie wurden Schulzens neuer und erweiterter Sammlung logarithmischer u. a. Tafeln einverleibt, und sind von 1 bis 2200 für alle Zahlen in 40 Decimalen berechnet: von da fort bis 10000, finden sie sich aber nur mehr für die Prim- und andere stark kombinierte Zahlen vor; weil sich die übrigen leicht durch Addieren ersetzen lassen. Die natürlichen Logarithmen halten das Mittel zwischen allen künstlichen, die was immer für eine geometrische Proportion zur Basis haben, und deßwegen heißen sie auch, denke ich, natürlich. Hyperbolisch nennt man sie aus der Ursache, weil die Hyperbel zwischen den Assymtoten ebenfalls diese Logarithmen zu finden dient, und durch Hilfe derselben quadriert werden kann.

Oben genannter Schulze rückte auch eine kurze Anleitung ein, jeden briggischen Logarithm in einen hyperbolischen zu verwandeln: ich will sie, um sich im Benöthigungsfalle helfen zu können, ganz hieher setzen. Man braucht hierzu die kleine Tabelle, wo für jedes Ziffer eines dekadischen Logarithms eine solche Zahl gesetzt werden muß.

1	2,302585
2	4,605170
3	6,907755
4	9,210340
5	11,512925
6	13,815510
7	16,118095
8	18,420680
9	20,723265

Folgendes Beyspiel soll die ganze Verfahrungsart sattsam aufklären. Es sey der dekadische Logarithm von 1987 = 3,2981979 gegeben, so verwandelt er sich auf diese Art in einen hyperbolischen:

		3,2981979
statt	3 . . .	6,9077553
	2	4605170
	9	2072326
	8	184206
	1	2302
	9	2072
	7	161
	9	20
		7,5943810

7,5943810 der natürliche Logarithm von der Zahl 1987, wo bloß das letzte Ziffer 0 gefehlt ist und 4 heißen soll; daher können manchmal die Ziffer am Ende um 1 verstärkt werden; vorzüglich wenn die nächstfolgenden sehr groß sind und im Anschreiben weggelassen werden müssen.

§. 211.

§. 211. **Aufgabe.** Die Hyperbel durch Hilfe des logarithmischen Differenzials quadrieren.

Auflösung. Es ist bey jeder Hyperbel

$$y^2 = \frac{c^2 v^2}{a^2} - \tfrac{1}{4} c^2 = \frac{4 c^2 v^2 - c^2 a^2}{4 a^2} = \frac{c^2}{4 a^2} (4 v^2 - a^2)$$

$$y = \frac{c}{2a} \sqrt{4 v^2 - a^2}$$

$\times dv$

$$y\,dv = \frac{c\,dv}{2a} \sqrt{4 v^2 - a^2}$$

Es ist aber $\sqrt{4 v^2 - a^2} = 2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64 v^3} - \frac{a^6}{512 v^5} \ldots$

Folglich substit. $y\,dv = \frac{c\,dv}{2a} \left(2v - \frac{a^2}{4v} - \frac{a^4}{64 v^3} - \frac{a^6}{512 v^5} \ldots \right)$

$$= \frac{c v\,dv}{a} - \frac{c a v^{-1}\,dv}{8} - \frac{c a^3 v^{-3}}{128} - \frac{c a^5 v^{-5}}{1024} \ldots$$

$$S(y\,dv) = \frac{c v^2}{2a} - \frac{c a \,Log.\, v}{8} + \frac{c a^3 v^{-2}}{256} + \frac{c a^5 v^{-4}}{4096} \ldots$$

oder $= \frac{c\,v^2}{2\,a} - \frac{c\,a\,Log.\,v}{8} + \frac{c\,a^3}{256\,v^2} + \frac{c\,a^5}{4096\,v^4} \ldots$

Also die ganze Hyp. $= \frac{c\,v^2}{a} - \frac{c\,a\,Log.\,v}{4} + \frac{c\,a^3}{128\,v^2} + \frac{c\,a^5}{2048\,v^4} \ldots$

§. 212. **Zusatz.** Ist die Hyperbel gleichseitig, so metamorphosiert sich die Reihe in folgende

$$\text{Quad. Hyp.} = v^2 - \frac{a^2\,Log.\,v}{4} + \frac{a^4}{128\,v^2} + \frac{a^6}{2048\,v^4}$$

§. 213. **Anmerk.** Wenn das obige Exempel §. 195 eine andere Wendung erhält, so haben wir folgende Aufgabe vor uns liegen. Es dörfen nur die äußern Baumreihen der beyden hyperbelförmigen Seitenalleen bleiben, der übrige Platz soll dazwischen mit Rasenstücken belegt werden; wie viel hat man Quadratfuß dazu nöthig?

Auflösung. Weil bey dieser gleichseitigen Hyperbel jede Achse 120, und die Abscisse 80 Schuh hält, so ist, indem $v = \frac{120}{2} + 80 = 60 + 80 = 140$ beträgt, der Quadratinhalt folgende Reihe

$$140^2 - \frac{120^2 \times 2{,}146128}{4} + \frac{120^4}{128 \times 140^2} + \frac{120^6}{2048 \times 140^4} \ldots$$

Die positiven Glieder geben ohngefähr bey der Berechnung $140^2 = 19600$

$$\frac{120^4}{128 \times 140^2} = 84$$

$$\frac{120^6}{2048 \times 140^4} = 4$$

$$19688.$$ Das negative Glied

$$\frac{120^2 \times 146128}{4} = 7726$$

$$11962$$ Quadratschuhe.

§. 214. Anmerk. Die Hyperbel wurde hier ohne Zuziehung der Assymtoten quadriert, folglich dorften auch die hyperbolischen Logarithmen nicht gebraucht werden, sondern die dekadischen, weil sie übrigens mit unsern Zahlensystem am besten harmonieren. Hätte man sich des hyperbolischen Logarithms von 140, welcher 4,94164 ist, bedient, so würden hier am Ende nur 1898 Füße herausgekommen seyn, welches offenbar zu wenig wäre; denn sucht man hier aus der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ den Werth der Ordinate, so erhält man dafür 128 Schuhe, dieß nun mit der Abscisse 80 multipliciert, giebt 10240 Quadratfuß, das ganze Dreyeck, wovon die Doppelordinate die Grundlinie, und die Abscisse die Höhe ist; weil aber die Hyperbelfläche größer seyn muß, als dieses Dreyeck; indem sich die Kurve zu beyden Seiten darüber hinausschwingt, so wäre das Resultat mit hyperbolischen Logarithmen viel zu wenig. Es folgt also schon aus diesem einzigen Beyspiel, daß man in solchen Fällen zu den gemeinen Logarithmen die Zuflucht zu nehmen habe. Ich würde vielleicht zu weitläuftig seyn, wenn ich hier auch die Methode zeigte, die Hyperbel durch Hilfe der Assymtoten zu quadrieren.

§. 215. Anmerk. Ueberhaupt sind die Mathematiker in Behaudlung der logarithmischen Differentialien noch nicht ganz einig. Die allermeisten schweigen, in soweit es dabey auf die Anwendung ankömmt, gänzlich. Abel Bürja, der in diesen Stück sehr tief eindringt, und den großen Analysten Kästnern, Eulern u. d. gl. glücklich nachdenkt, drückt sich am Ende so aus. „Die Integralrechnung ist bis daher „noch keine vollständige Kunst; sondern sie besteht meistens in „mehr oder weniger Versuchen, welche verschiedne große Ma„thematiker gemacht haben, um die dahin einschlagenden Auf„gaben aufzulösen.“ Die Sache setzt zu viele und manigfaltige Kenntnisse der Exponentialrechnung, der unendlichen Reihen und der Funktionen voraus, welche wir hier wegen den engen Raum nicht abhandeln können.

§. 216. **Aufgabe.** Die Oberfläche eines hyperbolischen Afterkegels bestimmen.

Auflösung. $2ydy = \frac{2c^2vdv}{a^2}$

quad. $4y^2dy^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4}$

$+4y^2dv^2 = +4y^2dv^2$

$4y^2dy^2 + 4y^2dv^2 = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4y^2dv^2$

oder $4y^2(dy^2 + dv^2) = \frac{4c^4v^2dv^2}{a^4} + 4dv^2\left(\frac{c^2v^2}{a^4} - \frac{1}{4}c^2\right)$

$= \frac{c^2dv^2}{a^4}(4c^2v^2 + 4a^2v^2 - a^4)$

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{4(a^2+c^2)v^2 - a^4}$

Und ist wieder $4(a^2 + c^2) = m$ so kömmt

$2y\sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{cdv}{a^2}\sqrt{mv^2 - a^4}$

Aber

Aber $\sqrt{m\,v^2 - a^4} = m^{\frac{1}{2}} v - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8\, m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16\, m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots$

Folgl. $2\, y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \frac{c\, dv}{a^2} \left(m^{\frac{1}{2}} m - \frac{a^4 v^{-1}}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^8 v^{-3}}{8\, m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{12} v^{-5}}{16\, m^{\frac{5}{2}}} \ldots\ldots \right)$

$$= \frac{m^{\frac{1}{2}} c\, v\, dv}{a^2} - \frac{a^2 c\, v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c\, v^{-3} dv}{8\, m^{\frac{3}{2}}} - \frac{a^{10} c\, v^{-5} dv}{16\, m^{\frac{5}{2}}} \ldots$$

$\times \pi$ $\quad 2 \pi y \sqrt{dy^2 + dv^2} = \pi \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c\, v\, dv}{a^2} - \frac{a^2 c\, v^{-1} dv}{m^{\frac{1}{2}}} \;\&c. \right)$

$$S \left(2 \pi \sqrt{dy^2 + dv^2} \right) = \pi \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} c\, v^2}{2\, a^2} - \frac{a^2 c \times Log.\, v}{m^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^6 c}{16\, m^{\frac{3}{2}} v^2} - \frac{a^{10} c}{64\, m^{\frac{5}{2}} v^4} \ldots \right)$$

Wenn

Wenn man endlich für m seinen Werth $4(a^2 + c^2)$ setzt, wo demnach

$$m^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{a^2 + c^2}$$

$$m^{\frac{3}{2}} = 8\sqrt{(a^2 + c^2)^3}$$

$$m^{\frac{5}{2}} = 32\sqrt{(a^2 + c^2)^5}$$ gielt, so erscheint die Reihe für die Oberfläche in dieser Gestalt:

$$\pi\left(\frac{c v^2 \sqrt{a^2 + c^2}}{a^2} - \frac{a^2\, Log.\, v}{2\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{a^6 c}{128 v^2 \sqrt{(a^2 + c^2)^3}} + \frac{a^{10} c}{2048 v^4 \sqrt{(a^2 + c^2)^5}} \ldots\right)$$

§. 217. **Zusatz.** Hat der Afterkegel gleiche Achsen, so bekommen wir folgenden Ausdruck:

$$\pi\left(\frac{a v^2 \sqrt{2 a^2}}{a^2} - \frac{a^3\, Log.\, v}{2\sqrt{2 a^2}} + \frac{a^7}{128 v^2 \sqrt{(2 a^2)^3}} + \frac{a^{11}}{2048 v^4 \sqrt{(2 a^2)^3}} \ldots\right)$$

$$= \pi\left(v^2\sqrt{2} - \frac{a^2\, Log.\, v}{2\sqrt{2}} + \frac{a^4}{512 v^2 \sqrt{2}} + \frac{a^6}{32768 v^4 \sqrt{2}} \ldots\right)$$

§. 218. Anmerk. Zu allerletzt noch ein Beyspiel. Die Kuppel eines gothischen Tempels, die eine gleichseitige Hyperloide vorstellt, soll mit Kupferblech gedeckt werden, wie viel wird man dazu Quadratfüsse nöthig haben, wenn die Kuppel in der Höhe 20, und in der untersten Weite 44 Schuhe hält?

Auflösung. Aus der gegebenen Abscisse und der Doppelordinate läßt sich gemäß der Gleichung $y^2 = ax + x^2$ die Achse sehr leicht bestimmen. Es ist nämlich

$$22^2 = a \times 20 + 20^2$$
$$484 = 20a + 400$$
$$-400 \qquad -400$$
$$84 = 20a$$
$$:20 \qquad 4\tfrac{1}{5} = a$$
$$\text{oder } 4{,}2 = a$$

Weil nun $v = 20 + \frac{4{,}2}{2} = 20 + 2{,}1 = 22{,}1$ so wird die Reihe, da $\sqrt{2} = 1{,}414$ ist, für den besondern Fall so aussehen

$$3{,}14\left((22{,}1)^2 \times 1{,}414 - \frac{(4{,}2)^2 \times 1{,}3222}{2 \times 1{,}414}\right.$$
$$\left. + \frac{(4{,}2)^4}{512 \times (21{,}1)^2 \times 1{,}414} \ldots\right)$$
$$3{,}14(690{,}61 - 23{,}32 \ldots = 3{,}14 \times 667{,}29$$
$$= 2095{,}29 \text{ Quadratschuhe.}$$

Von der umgekehrten Methode der Tangenten.

§. 219. Erkl. Man versteht unter dieser Methode die Lehre, aus einer gegebnen Tangente, Subtangente, Normal, Subnormal, Rektifikation, Quadratur, Kubatur, oder Oberflächen-

aus-

ausdruck irgend einer krumen Linie, die Kurve selbst, welcher so eine Tangente u. d. gl. zugehört, wieder daraus zu bestimmen.

§. 220. Zusatz. Die obige Benennung dieser Lehre ist daher nicht am besten angepaßt: man würde vielleicht treffender sagen: Die umgekehrte Methode des Differentialkalkuls in Hinsicht auf die krummen Linien.

§ 221. Aufgabe. Welcher Kurve kömmt die Subnormal $\frac{1}{2} a - x$ zu?

Auflösung. Man setze den gegebnen Ausdruck dem allgemeinen der Subnormal gleich, schicke die Gleichung zum Integrieren an, und suche für y^2 nach der Integration den entsprechenden Werth. Also

$$\frac{1}{2} a - x = \frac{y\,dy}{dx}$$

$$\times dx \qquad \frac{a\,dx}{2} - x\,dx = y\,dy$$

$$\text{Integ.} \qquad \frac{ax}{2} - \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2}$$

$$\times 2 \qquad ax - x^2 = y^2$$

welche Gleichung für den Zirkel gehört; also ist der Zirkel allein jene Kurve, die die Subnormal $\frac{1}{2} a - x$ hat.

§. 222. Aufgabe. Welcher Kurve gehört die Quadratur $\frac{2}{3} x \sqrt{px}$ zu?

Auflösung. Man differenziere den gegebenen Ausdruck und setze ihn mit dem Flächenelement in eine Gleichung. Es ist aber

$$d\left(\tfrac{2}{3}x\sqrt{px}\right) = d\left(\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{3}{2} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx,$$
$$= p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$$

Also $\quad p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = y dx$

$:dx \quad p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$

quad. $\quad px = y^2$ Folglich muß diese Linie eine Parabel seyn.

§. 223. **Aufgabe.** Wie heißt die krume Linie deren Subtangente beständig ist?

Auflösung. Es sey die beständige Größe $= p$, so ist

$$p = \frac{y\,dx}{dy}$$

$$p\,dy = y\,dx$$

$:dx \quad \frac{p\,dy}{dx} = y$ die Gleichung für die Logistik

§. 223. **Aufgabe.** Giebt es auch eine Kurve, deren Subnormal beständig ist?

Auflösung. Man setze die beständige Größe $= q$, so giebt dieß

$$q = \frac{y\,dy}{dx}$$

$\times dx \quad q\,dx = y\,dy$

Integ. $\quad qx = \frac{y^2}{2}$

$\times 2 \quad 2qx = y^2.$

Ist nun $\quad 2q = p$, so wird

$px = y^2$ seyn.

Das heißt, die Linie ist die apollonische Parabel.

§. 224.

§. 224. **Aufgabe.** Wie müßte eine Linie von der Beschaffenheit konstruiert werden, daß die Subtangente so groß wäre als das Quadrat der Ordinate?

Auflösung. $\frac{y\,dx}{dy} = y^2$

$:y \quad \frac{dx}{dy} = y$

$dx = y\,dy$

Integ. $x = \frac{y^2}{2}$

$\times 2 \quad 2x = y^2$

Werden nun einige x nach Belieben angenommen, und zwischen ihnen und der Zahl 2 eben so viele mittlere Proportionalen gesucht, so erhält man Ordinaten einer solchen Linie.

§. 225. **Aufgabe.** Wie sieht die Kurve aus, wovon sich die Kubatur des aus ihr erzeugten Körpers durch $\pi\left(\frac{3ac^2x^2 + 2c^2x^3}{6a^2}\right)$ ausdrücken läßt?

Auflösung. Es ist $d\left(\pi\left(\frac{3ac^2x^2 + 2c^2x^3}{6a^2}\right)\right)$

$$= \pi\left(\frac{6ac^2x\,dx + 6c^2x^2\,dx}{6a^2}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{ac^2x\,dx + c^2x^2\,dx}{a^2}\right)$$

Folglich heißt die Gleichung

$$\pi y^2\,dx = \pi\left(\frac{ac^2x\,dx + c^2x^2\,dx}{a^2}\right)$$

$:\pi$

$$:\pi \qquad y^2 dx = \frac{ac^2 x dx + c^2 x^2 dx}{a^2}$$

$$:dx \qquad y^2 = \frac{ac^2 x + c^2 x^2}{a^2}$$

oder $y^2 = \frac{c^2 x}{a} + \frac{c^2 x^2}{a^2}$ welches die Hyperbeläquation ist, wenn statt dem Parameter die kleine Achse gebraucht wird.

§. 226. **Aufgabe.** Die Quadratur einer krummen Linie kann durch die unendliche Reihe $\frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots$ ausgedrückt werden; wie mag die Gleichung davon aussehen?

Auflös. Man differenziere allererst die Reihe

$$d\left(\frac{cv}{2} - \frac{cv^3}{3a^2} - \frac{cv^5}{5a^4} \ldots\right)$$

$$= \frac{cdv}{2} - \frac{3cv^2 dv}{3a^2} - \frac{5cv^4 dv}{5a^4} \ldots$$

$$= \frac{cdv}{2} - \frac{cv^2 dv}{a^2} - \frac{cv^4 dv}{a^4} \ldots$$

so entsteht die Gleichung

$$ydv = \frac{cdv}{2} - \frac{cv^2 dv}{a^2} - \frac{cv^4 dv}{a^4} \ldots$$

$$:dv \qquad y = \frac{c}{2} - \frac{cv^2}{a^2} - \frac{cv^4}{a^4}$$

$$\text{quad.} \qquad y^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2} - \frac{c^2 v^4}{a^2} + \frac{c^2 v^4}{a^4} \ldots$$

also $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 v^2}{a^2}$ das heißt die krumme Linie ist die Ellipse.

§. 227.

§. 227. Anmerk. Indeß bleibt diese Art der umgekehrten Methode aus unendlichen Reihen die ursprüngliche Gleichung jener Linie, woraus sie abstammt, wieder zu entwickeln immerhin mühsam; ja es ist oft alles Bemühen fruchtlos, weil dabey Vortheile sollen angewendet werden, die bis daher noch nicht entdeckt sind.

§. 228. Aufgabe. Giebt es auch eine Linie deren Quadratur $\frac{1}{2}xy$ ist?

Auflösung. $d(\frac{1}{2}xy) = \frac{xdy + ydx}{2}$

Folglich $ydx = \frac{xdy + ydx}{2}$

$:dx \qquad y = \frac{xdy}{2dx} + \frac{y}{2}$

$$\begin{array}{rcl} -\frac{y}{2} & & -\frac{y}{2} \\ \hline \frac{y}{2} & = & \frac{xdy}{2dx} \end{array}$$

$\times y \qquad y = \frac{xdy}{dx}$, und in eine Proportion aufgelöset, giebt

$y : x = dy : dx$. Es ist dieß demnach eine Linie, wo sich Absciße und Ordinate wie ihre Differentialen verhalten, welches aber nur in geradlinichten Dreyecken möglich ist. Ein Beweis, daß sich diese Methode auch auf gerade Linien erstreckt.

§. 225. Anmerk. Nun träffe die Reihe noch die übrigen krumen Linien, z. B. Zikloide, Chonchoide, Cissoide u. d. gl., so auch die Artikel vom Krümmungsstralle, vom Wendepunkt der Kurven, von verschiednen Evoluten, von Linien doppelter Krümmung u. s. f. Weil wir uns aber vorzüglich auf die Kegelschnitte einschränkten, und selbe auch wirklich etwas weitläuftig abhandelten, so wollen wir sie für dießmal weglassen. Vielleicht giebt es Gelegenheit, ihnen ein besonders Bändchen einzuräumen, wo wir dann mit selben mehr ins Detail gehen können, als es hier wegen Einschränkung des Raumes geschehen dorfte.

Geschichte der Kugeldreyeckslehre.

Astronomie, Geographie und zum Theil auch die Gnomonik waren die drey wichtigen Beschäftigungen der Menschen, welche die Kugeldreyeckslehre, oder wie sie sonst genennt wird, die sphärische Trigonometrie zu einem Hauptbedürfniße der nützenden Gelehrsamkeit gemacht haben. Es wird daher, denke ich, Niemand die Behauptung übertrieben finden, daß die sphärische Trigonometrie so alt, als die Astronomie selbst sey. Die Unternehmungen des Hyparchus in dieser Wissenschaft sowohl als in der Geographie, da er nach dem Zeugniße des Strabo der erste war, welcher die Lage der Oerter auf der Erde nach Länge und Breite bestimmte, fordern zu viele trigonometrische Rechnungen dieser Art, als daß sich etwas solches ganz ohne selben leisten ließe. Noch erstaunungswürdiger sind die astronomischen Arbeiten des Ptolomäus in seinem Almagest, welches so lange als das beste und wichtigste Werk in der Astronomie angesehen wurde. Freylich mögen damals die Lehrsätze dieser Wissenschaft noch in kein ordentliches System gebracht worden seyn, wie heut zu Tage; es mögen auch mehrere solche Sätze, theils ganz gemangelt, theils einer bessern Entwicklung bedürft haben. Indessen waren die Materialien zu

selben doch da. Wirklich hat dieß Geber, ein arabischer Astronom, welchen Snellius einen Osorem calculorum nennt, weil er, wie es heißt, weitläuftige Rechnungen gewaltig scheute, sattsam bewiesen. Er kommentierte über obengenannten Almagest, und lieferte bald darauf eine kurze Abhandlung der sphärischen Trigonometrie, worinn er seine erfundnen Lehrsätze, rechtwinklichte Kugeldreyecke zu berechnen, mit unter vortrug. Zwar schrieb auch schon Menelaus von Alexandrien, der zu Ende des ersten Jahrhunderts lebte, und sich ebenfalls die Astronomie zum Lieblingsstudium machte, ein Werk in 3 Bänden von den sphärischen Triangeln, wo aber Gebers erfundne Lehrsätze noch nicht darinn zum Vorschein kommen, folglich kein so vollständiges Lehrgebäude seyn konnte.

Demohngeachtet hatte diese Wissenschaft gleiches Schicksal mit ihrer Schwester der ebnen Trigonometrie. Ihre Rechnungen waren erstaunlich weitläuftig und ermüdend, bis endlich mit Anfange des vorigen Jahrhunderts zur größten Wohlthat der gesammten Mathematik die Logarithmen erfunden wurden. Die Geschichte der Logarithmenerfindung, die ich am Ende meiner Geometrie kurz anführte, gehört also beyden Trigonometrien gemeinschaftlich.

Bis auf Nepern und Christian Wolfen erhielt übrigens die Kugeldreyeckslehre keine merklichen Verbesserungen oder erhebliche Zusätze, wie die übrigen Aeste der Mathematik. Ersterer erfand eine allgemeine Regel für sämmtliche Auflösungen rechtwinklichter Dreyecke: Wolf hingegen, obwohl er die ebne Trigonometrie unter allen seinen abgehandelten

besten Wissenschaften am unvollständigsten vortrug, bewies sich doch in der sphärischen noch glücklicher als Neper; denn seine Regel bezieht sich auch auf die schiefwinklichten Dreyecke. Es sind bey ihm alle Fälle, zween ausgenommen, wo nämlich aus den Seiten die Winkel und aus den Winkeln die Seiten bestimmt werden sollen, in dieser kurzen Formel enthalten: r × cos. m = sin s × sin S = cot a × cot A, wo r den Radius, m *partem mediam*, s und S *sejunctas*, a und A *adjacentes* bedeuten.

Noch glücklicher als Wolf war Lambert, welcher einen allgemeinen Beweis aller Regeln der sphärischen Trigonometrie und eben darum eine einzige allgemeine Regel ihrer Ausübung erfand. Herr Prof. Ries hat nach Klemms Zeugniß diese Lehre gleichfalls in einer akademischen Abhandlung 1758 sehr ausführlich und gründlich vorgetragen. Abt Häseler widmete diesem Theile der Mathematik in seinen Anfangsgründen einen eignen Band, und handelte ihn so vollständig und originäl ab, als vielleicht noch keiner oder wenige vor ihm gethan haben. Er hat darinn ein besonders Verdienst, daß man sein ganzes System ohne Figuren von Drath oder Pappendeckel und ohne mühsame Perspektivzeichnungen verstehen kann. Die wichtigsten Lehrsätze leitet dieser Mathematiker aus den Formelausdrücken der ebnen Trigonometrie her. Er weis auch dieses für Anfänger so trockne Studium am Ende durch eine leichte Anwendung auf die Astronomie und Geographie sehr angenehm und interessant zu machen.

Geschichte der höhern Mathematik.

Bedürfniß, wie bey der Elementargeometrie und den übrigen Zweigen der Mathese, konnte es eigentlich nicht seyn, was die Erfindung der höhern Mathematik veranlaßte; so unentbehrlich sie auch heut zu Tag in manchem Fache geworden ist. Das Vergnügen eines rastlosen Forschgeistes, aus der reinsten Wahrheitsquelle, die nur in dem mathematischen Gebiete angetroffen werden kann, noch ferner und ferner zu schöpfen, däucht mir, wo nicht die einzige, doch die thätigste Triebfeder, sowohl der Erfindung, als der Erweiterung dieser erhabnen Wissenschaft gewesen zu seyn.

Die ursprünglichsten Spuren derselben trift man schon in der Schule des Plato an, da man ihn selbst für den ersten hält, welcher die Eigenschaften der Kegelschnitte seiner Untersuchung würdig fand, und da die Entdeckung der für die Alten so wichtigen Wissenschaft von den geometrischen Oertern eine vorzügliche Frucht seiner Schule war.

Beyläufig 100 Jahre nach Plato stand Archimedes auf, der sich hauptsächlich durch die Quadratur krummer Linien auszeichnete. Die Methode, mit der er zu Werke gieng, die Parabel zu quadrieren, scheint mir noch sinnreicher zu seyn, als dessen Erfindung des Verhältnißes der Kugel und des Zylinders in der Elementargeometrie.

Nun kömmt die Reihe an Appollonius Pergäus, welcher in der höhern Mathese gerade das ist, was **Euklides**, unter dessen Nachfolger er gehört,

hört, in der Elementargeometrie war. Pergen in Pamphilien ist seine Vaterstadt und das Zeitalter desselben fallt etwa 40 Jahre nach Archimedes Flor. Zu Alexandrien studierte er die Mathematik, und gab hier auch 8 Bücher von den Kegelschnitten in griechischer Sprache heraus, worinn er alles zusammfaßte, was seine Vorgänger Aristes, Eudoxus, Menechmus, Euklides, Conon und Archimedes in diesem Fache geleistet hatten. Appollonius war der erste, welcher zeigte, daß man aus jedem Kegel alle drey Kurven erhalten könne; da man doch vorher irrig glaubte, die Parabel fodere einen rechtwinklichten, die Ellipse einen spitzwinklichten und die Hyperbel einen stumpfwinklichten Kegel. Es ist dieses Buch bis auf die Epoche der Analyse des Unendlichen die Normal der höhern Mathematik nach dem Beyspiele des Euklides in seiner Sphäre geblieben.

Man hatte aber anfänglich nur die vier ersten Bücher, und erst im vorigen Jahrhunderte fand Alphonsus Borelli bey seiner Reise durch Florenz das fünfte, sechste, und siebende Buch in einem arabischen Manuscripte, und gab sie in einer lateinischen Uebersetzung zu Rom 1661 in Folio heraus. Eben diese drey Bücher soll auch ein gewisser Jakob Golius in arabischer Sprache, beyläufig um die nämliche Zeit, aus Orient erhalten und ins Latein übersezt haben. Das lezte Buch des Appollonius noch ausfindig zu machen, gaben die Gelehrten bereits alle Hofnung auf, bis endlich dem Edmund Halley, Prof. der Geom. zu Oxfort, zufälliger Weise in der bodlejanischen Bibliothek ein arabisches Manuscript in die Hände gerieth. Uebrigens sind diese Bücher äusserst abstrakt und dunkel

abge-

abgefaßt, und wir können sie itzt sehr wohl entbehren. Eine Menge Mathematiker haben in der Folge darüber kommentiert. Der erste unter denselben war Pappus von Alexandrien, welcher vor dem fünften Jahrhundert nach Kristus Geburt collectanea mathematica erscheinen ließ, wovon aber die ersten zwey Bücher nicht ganz mehr auf uns gekommen sind. Er gedenkt in selben des Aristes, eines griechischen Mathematikers, der der Liebling des Euklides war und ebenfalls Schriften über die höhere Geometrie herausgab. Auf Pappus folgt Hypatia die Tochter Theons, eine große Philosophin und Mathematikerin, deren trauriges Ende in der Blüthe ihrer Jahre zur Kirchengeschichte gehört, und in Zimmermanns Werke von der Einsamkeit ausführlich beschrieben ist. Im sechsten Jahrhunderte wagte sich Eutocius mit vielem Glücke über die Auseinandersetzung seiner Dogmen. Hier darf auch jener persische Gelehrte Nassir Eddin nicht vergessen werden, der eben so richtig über den Appollonius als den Euklides glossierte.

Nun traf der allgemeine tiefe Schlaf der Wissenschaften unter den Christen auch die höhere Mathematik, bis endlich zu Anfang des siebenzehnten Jahrhunderts durch Leibnitz in Deutschland, durch Neuton und Wallis in Brittanien, durch den Deskartes und Marquis de l'Hopital in Frankreich, und endlich durch die Bernoulle in der Schweitz eine neue und ungleich glänzendere Epoche für die höhere Mathematik begann. Hier ist die kennbarste Gränzlinie zwischen der alten und neuen Theorie derselben gezogen. Die Rechnung des Unendlichen welche von diesen Männern theils erfunden, theils

erwei-

erweitert, und zu einiger Vollkommenheit gebracht worden, hat so viel gemeinnütziges, so viel erhabnes, so viel göttliches, daß sie die Erfindungen der Alten in diesen Stücke, wie der Sonnenglanz die schwachblinkenden Sterne verdunkelt. Isaak Barrow, der Lehrer des großen Neutons, welcher in der Mitte des siebenzehnten Jahrhunderts zu Cambridge und Gresham als Professor der Mathematik glänzte, gab unstreitig den Ton dazu an. Er war der Erfinder des sogenannten *Trianguli characteristici*, und bezeichnete die Differentialen der Ordinate und Abscisse d y und d x durch a und e. Wink genug für seinen Nachfolger Neuton, und für seinen deutschen Freund und Korrespondenten Leibniz, welche gleich große, erfinderische Köpfe waren, die entdeckte Spur zu verfolgen, und zum nämlichen Ziel auf verschiednen Wegen zu gelangen.

Die Engländer nennen die Rechnung des Unendlichen mit ihrem Neuton Fluxionenrechnung, und wir Deutsche heißen sie mit unserm Leibniz Differentialrechnung. Jene bezeichnen eine Fluxion d. i. ein Differential von x oder y durch $\dot{x}$ und $\dot{y}$; wir hingegen durch d x und d y. Im Grunde ist demnach die Sache einerley, man mag es so oder so nennen, so oder so bezeichnen; weil doch am Ende die übrige Verfahrungsart und das Resultat das nämliche bleibt.

Ehedem stritt sich die deutsche Parthey heftig und lange mit den Britten, ob Leibniz oder Neuton der wahre Erfinder der Differentialrechnung war. Die Geschichte hievon steht sehr umständlich in der leibnizischen Biographie des Chevalier de Jaucourt, so auch in des Montucla's Histoire des Mathe-

Mathematiques. Der Bescheid endlich dieses langwierigen Streites fiel endlich dahin aus, daß es sehr wohl möglich sey, daß zwey gleich starke Genie's bey ein und der nämlichen Veranlassung auch auf die nämliche Erfindung gerathen. Der sel. Hr. Prof. Böhm, welcher die mathematischen Artikel für die deutsche Enciklopedie geliefert, drückt sich bey dieser Gelegenheit so aus: „Der durchdringende „Geist Leibnitzens, vor (für) den nichts zu hoch „war, seine Aufrichtigkeit, womit er bey jeder an„dern Gelegenheit diejenige genennt, die ihn auf „die Spur gebracht, die Menge und Wichtigkeit „seiner andern Erfindungen, die seinen Namen auch „ohne die Entdeckung der Differentialrechnung ewig „ehrwürdig gemacht, und der von den neutonischen „ganz verschiedne Grund, worauf er sene Rechnung „gebaut, würden allein hinreichende Bürgen davon „seyn, daß er sie Neutonen nicht abgeborget, wenn „ihn auch letzterer nicht selbst in der Anmerkung zum „zweyten Lehrsatze des andern Buchs seiner princi„piorum (S. 226. der Ausgabe Amsterdam 1723) „davon freyspräche, indem er sagt: Als ich den „berühmten Mathematiker G. W. Leibnitz, mit „dem ich vor 10 Jahren in Briefwechsel gestan„den, bekannt machte, daß ich eine Methode „besitze, die größten und kleinsten Größen zu „bestimmen, die Tangenten zu ziehen u. s. f. „und durch Versetzung der Buchstaben die Auf„gabe, worauf es ankam (data aequatione quot„cunque fluentes quantitates inuoluente fluxiones „inuenire, et vice versa) ihm verborgen vorlegte, „antwortete er mir, daß er gleichfalls auf eine „solche Methode verfallen sey, und theilte mir „die seinige mit, welche mit der meinigen fast

gänz-

„gänzlich übereinkömmt, und nur in den Benen„nungen, Bezeichnungen, und in der Vorstellung „von der Weise, wie die Größen entstehen, da„von abweichet." Zeugniß genug, denke ich, daß Leibnitz eben so gut, als Neuton Erfinder dieser für die Mathematik so äusserst wohlthätigen Entdeckung war.

Indeß hatten beyde ihre Nebenbuhler, welche, wo nicht an der Erfindung, doch an dessen Vervollkommnung keinen geringen Antheil nahmen. Jakob Gregori, ein Schottländer, der 1664 ein Werk de vera Circuli et hyperbolae quadratura (versteht sich durch Approximation) herausgab, wetteiferte in der Anwendung der Analyse des Unendlicheu, wie dieß in seinem Buche (Exercitationes geometricae) sattsam erhellet, so ziemlich mit Neuton. Johann Wallis, Prof. der Geom. zu Oxfort, erleichterte diese Rechnung dadurch ungemein, daß er die Brüche, deren Nenner Würden sind, durch ganze Größen mit negativen Exponenten auszudrücken erfand. Gilles Persone de Roberval, Prof. der Mathematik auf den Kollegium Gervais, erfand eine Methode Kurven zu quadrieren und deren Tangenten zu ziehen, die in ihren Begriffen und Ausdrücken viel ähnliches mit der Fluxionenrechnung des Neutons hat, und so von andern zu reden.

Kaum war aber die Fehde wegen dem rechtmäßigen Erfinder zu Anfange des 18ten Jahrhunderts geendet, so fieng man an, die Richtigkeit dieses Kalkuls in Zweifel zu ziehen, und förmlich anzustreiten. Unter mehrern andern fiel es auch dem Abt Catelan ein, ihn als eine unnütze Methode auszuzischen. Nieuwentyt und Rolle behaupteten

hartnäckig, die Differentialrechnung wäre irrig, und beruhe auf falschen Gründen.

Aber diese Feinde der guten Sache fanden Widerleger, denen sie nicht gewachsen waren. Den ersten besiegte Marquis de l'Hopital, den zweyten Leibnitz selbst, Bernoulli und Herman; Rolles Kontroverse endlich wurde durch Varignon und Saurin hinlänglich entkräftet. Umständlicher läßt sich diese Streitgeschichte mehrmals in oben angeführtem Montucla lesen.

Leibnitz, der größte Geist, den je Deutschland hervorgebracht, verdient es, daß wir uns mit selben etwas umständlicher bekannt machen. Er wurde zu Leipzig 1646 den 3ten July gebohren. Sein Vater war Professor der Sittenlehre und Aktuarius der dasigen hohen Schule. Schon im fünfzehnten Jahre betrat er die akademische Bahn. Thomasius wurde sein Lehrer in der Weltweisheit, und Kuhnius in der Größenlehre. So befangen die Kenntnisse dieses Mannes waren, und so unangenehm dessen Vortrag noch nebenher ausfiel, so konnten doch diese ungünstigen Umstände die natürliche Neigung Leibnitzens nicht ersticken. Nach zwey Jahren reisete er nach Jena ab, wo ihm nun das Glück an den berühmten Weigel einen bessern Lehrer schenkte. Er verlegte sich hier auch auf die Rechtsgelehrsamkeit, und brachte es so weit, daß man ihm 1666 zu Altorf neben der Doktorswürde auch noch eine ausserordentliche Professur der Rechte antrug. Hier wurde Leibnitz mit einen gewissen Herrn von Boineburg bekannt, welcher ihn beym Churfürsten zu Mainz empfahl, wo er auch wirklich 1669 churf.

Main-

Mainzischer Revision = und Kanzley = Kammerrath wurde. Weil nun Hr. von Boineburg entschlossen war, seinen Sohn in Paris studieren zu lassen, so wurde Leibnitz mit selbem dahin geschickt. In Paris erfand er eine Rechenmaschine, die der Akademie und dem Minister Kolbert so sehr gefiel, daß sie ihn als ein besoldetes Mitglied aufzunehmen versprachen, wofern er die römische Religion annehmen wollte; welches er aber ausschlug, und bald nachher, weil Hr. von Boineburg gestorben war, nach London reisete. Dort wurde Leibnitz mit Boyle, Wallis, Gregori, Barrow und mit seinem Rival dem Neuton bekannt. Als nun auch der Churfürst von Mainz mit Tod abgieng, kehrte er wieder nach Paris, wo er sich noch 15 Monate aufhielt. Nach Verlauf dieser Zeit unternahm er auch eine Reise durch Franken, Baiern, Schwaben, Oesterreich und Italien vor. Im Jahre 1699 wurde er von der Akademie zu Paris als auswärtiges Mitglied aufgenommen, und bald darauf ward er auch zu Berlin als Direktor der neu errichteten Akademie ernennt. Beyläufig 12 Jahre nachher beschenkte ihn Czaar Peter, der Erste, mit der Würde eines Justitzrathes, und einem jährlichen Gehalt von 1000 Rubel. Endlich starb Leibnitz 1716 in einem Alter von 70 Jahren, und hinterließ den Ruhm eines der größten Mathematiker, Naturkündiger, Chimiker, Dichter und Sprachforscher, so, daß Deutschland ewig auf ihn stolz seyn wird.

Seither bedienen sich nun die Mathematiker dieser Infinitesimalrechnung mit dem glücklichsten Erfolge. Selbst in der Physik werden dadurch die schwersten und nützlichsten Probleme mit erstaunlich

leichter Mühe aufgelöset. Johann Bernoulli, Clairaut d'Alembert, Daniel Bernoulli, Maclaurin, Euler, und vorzüglich Kästner haben sie zu jener Vollkommenheit gebracht, in welcher sie dermalen blühet. Man darf wahrhaft zweifeln, wenn man den engen Raum unsrer Lebenstäge, und die Menge anderer Wissenschaften, die einen nahmhaften Bezug auf die ausübende Mathematik haben, beherziget, ob dieses Studium noch höher könne getrieben werden, als es wirklich geschehen ist.

Ich kann nicht umhin, unter den großen Beförderern dieser tiefsinnigen Wissenschaft auch ein Frauenzimmer unsers Jahrhunderts anzuführen, welches um so mehr bewundert zu werden verdient, je weniger man vom schönen Geschlechte Personen zählt, die für ernste Studien eingenommen wären. Sie ist eine Mayländerinn, mit Namen Maria Gantana Agnesi. Von ihrem männlichen Genie kann man sich dadurch leicht einen Vorbegriff machen, wenn man bedenkt, daß sie neben ihrer Muttersprache noch vier andere Sprachen redete; daß sie in ihrem neunten Jahre schon eine eigen ausgearbeitete lateinische Abhandlung vorlas; daß sie die Geometrie des Euklides, die Algebra, die Physik und Methaphysik, überhaupt die ganze Philosophie studierte, und daß sie endlich einen sehr brauchbaren Kommentar über des Marquis de l'Hopital Abhandlung von den Kegelschnitten schrieb. Den ausgezeichnesten Ruhm aber erwarb sie sich durch ihr großes Werk über die Analysis des Unendlichen, welches sie im 30sten Jahre ihres Alters in zween Quartbänden unter dem Titel herausgab: Instituzione analitiche, ad vso della Giouentu Italiana di

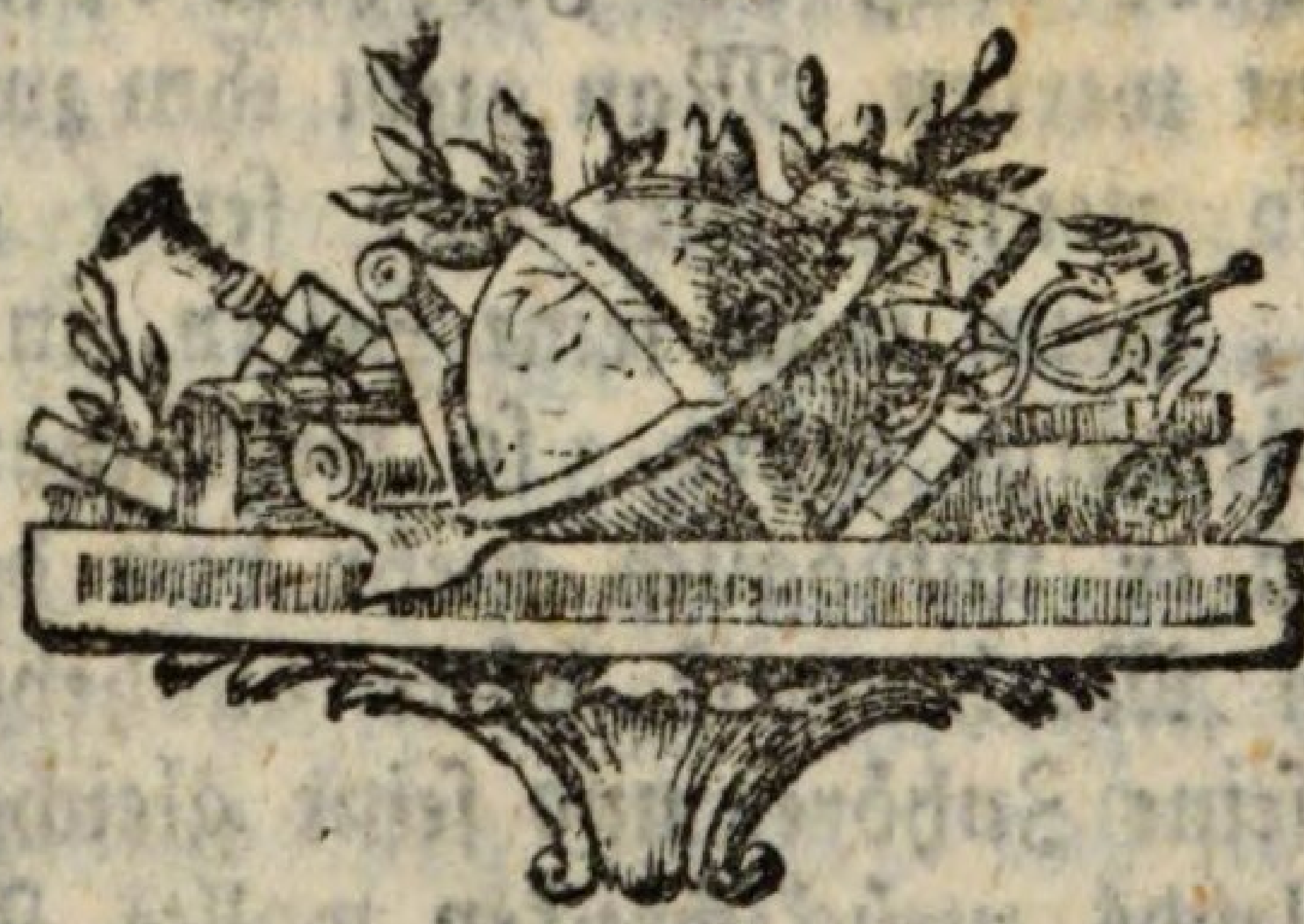
Donna

Donna Maria Gaetana Agnesi, Milanense, dell' Academia delle Scienze di Bologna 1748. Die Pariserakademie bezeugte ihr öffentlich, „es hersche „Ordnung, Deutlichkeit und Kürze in allen Theilen desselben; es sey noch in keiner Sprache eine „Anleitung zur Analyse erschienen, die so geschwinde „und so tief in das Innere dieser Wissenschaft „führe: sie (die Akademie) sehe daher diese Schrift „der Agnesi für die vollkommenste und beste in „ihrer Art an." Zwey Jahre nachher bekam sie wirklich zu Bologna eine Professur aus der Mathematik, welche sie aber kaum ein Jahr bekleidete, indem sie beschloß, nach damaliger Sitte ihre übrigen Tage in einem Kloster zu verleben.

Unter den Verbreitern der Differentialrechnung im Deutschlande muß der Freyherr von Wolf am ersten genannt werden. Man giebt ihm zwar Schuld, daß er sie so ziemlich kurz und seicht abgehandelt habe; allein, wenn man seine Zeiten, in welcher er lebte, zu Gemüthe führt, so wird man bald begreifen, daß er unmöglich mehr von der theoretischen höhern Mathematik hätte ausheben können, wenn er je seine Zuhörer und seine gleichzeitigen Leser nicht vollends zurückschrecken wollte. Wolfs Verdienst um die Mathematik bleibt demnach troz allen Einwendungen seiner Gegner nichts destoweniger immer groß; weil er in Rücksicht seiner Lage doch das leistete, was er leisten konnte.

Von den übrigen Lehrbüchern der höhern Geometrie verdient neben den bekannten des Segners, la Cailles, Karstens und Kästners, welcher lezterer freylich für Einstudierte das beste geliefert, wegen ihrer

Vollständigkeit und Anwendung fürs Praktische de la Chapelle, und der öfter erwähnte Abt Häseler, angerühmt zu werden. Schade, daß keiner von der Analyse dabey einen Gebrauch gemacht. Letzterer gab zwar das Wort, noch einen fünften Band zu liefern, in welchem er die Differentialrechnung eben so ausführlich und deutlich vorzutragen verspricht, als es in den 4 ersten Bänden geschehen; worauf ich mich und jeder Liebhaber der Deutlichkeit und Vollständigkeit nicht anders als sehnlichst freuen kann und muß.

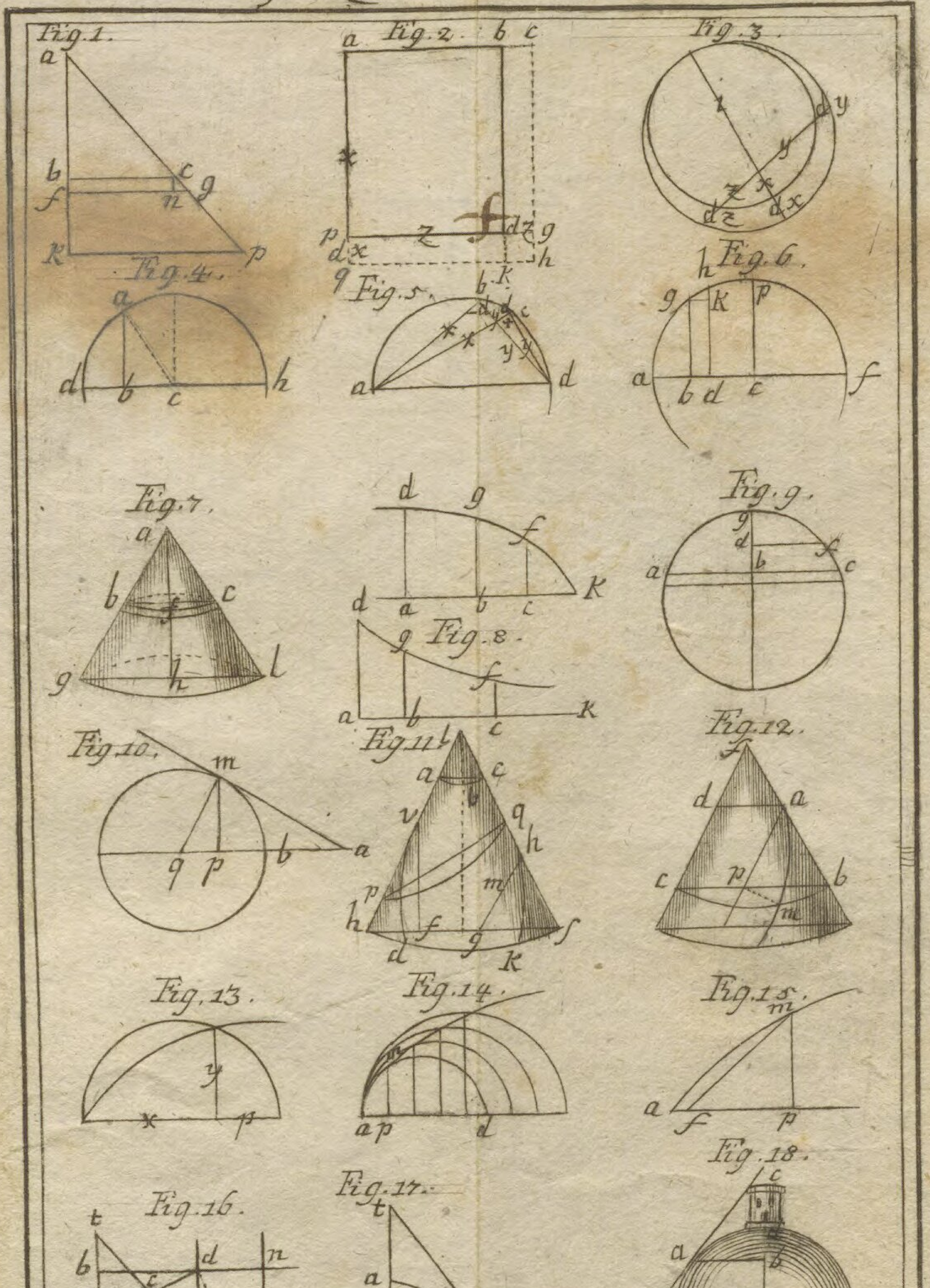


Mit Franzischen Schriften.

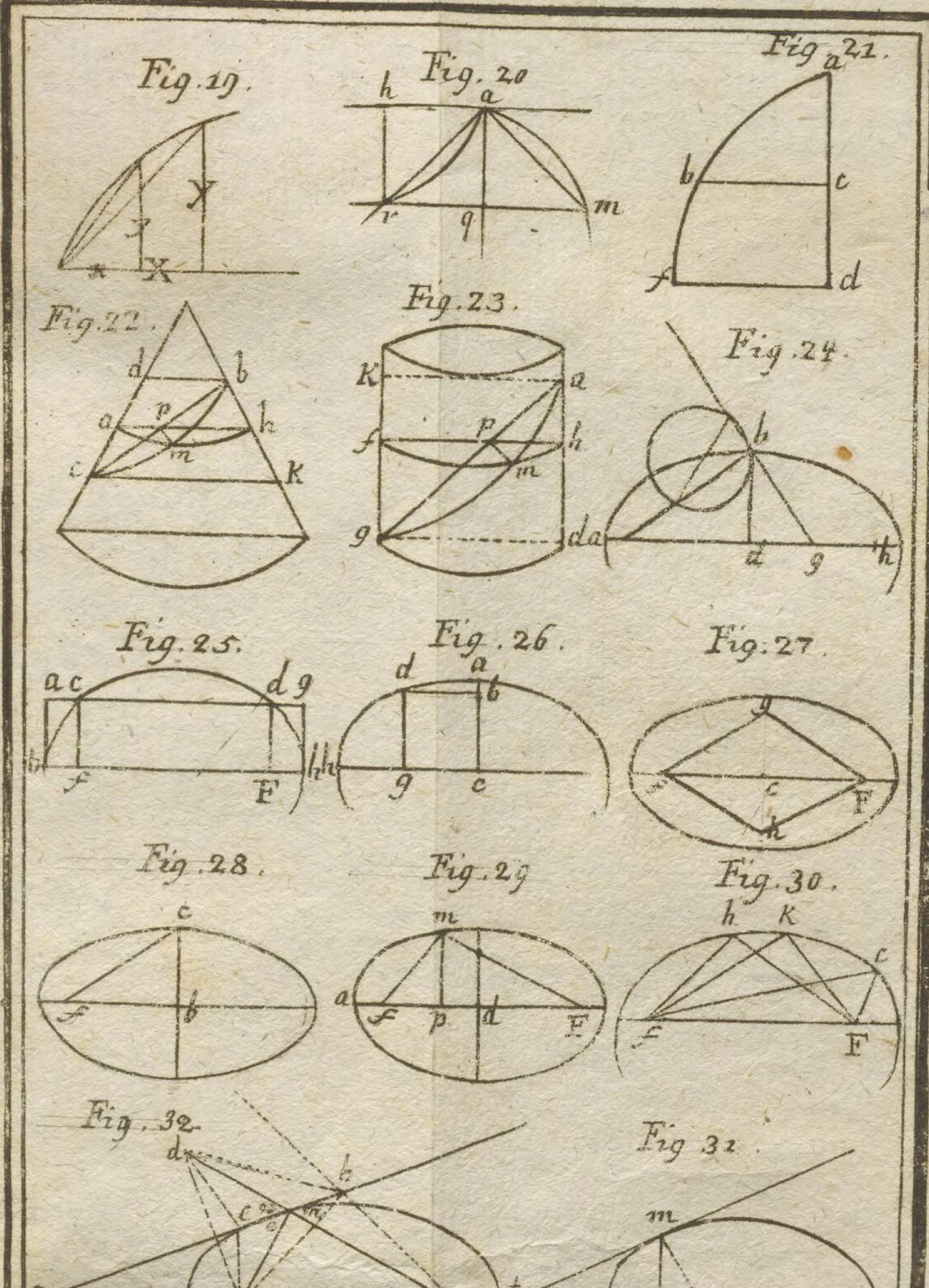
Berichtigungen.

Seite	Linie	statt	lies
8	12	einer solchen Ordnung	einer solchen Größe der ersten Ordnung
9	11	$:\infty$	$\times a$
21	16	num 900	nun 900
19	1	$x^2\,(xv - yz)$	$x^2\,d\,(xv - yz)$
39	4	$\frac{3mz}{a} - \frac{3my^2}{a^2} + \frac{3mz^3}{a^3}$ &c.	$\frac{3mz}{a} - \frac{3mz^2}{2a^2} - \frac{3mz^3}{3a^2} - \frac{3mz^4}{4a^2} - \frac{3mz^5}{5a^5} \ldots$
42	6	seine Abscisse	ihre Abscisse
43	25	Subtangente	Subnormal
64	17	a	p
95	26	$: 2\,\frac{c^2}{2} : \frac{a^2}{2} =$ &c.	$: 4\,\frac{c^2}{4} : \frac{a^2}{4} =$ &c.
106	15	Fig. 31	Fig. 32
110	9	32	34

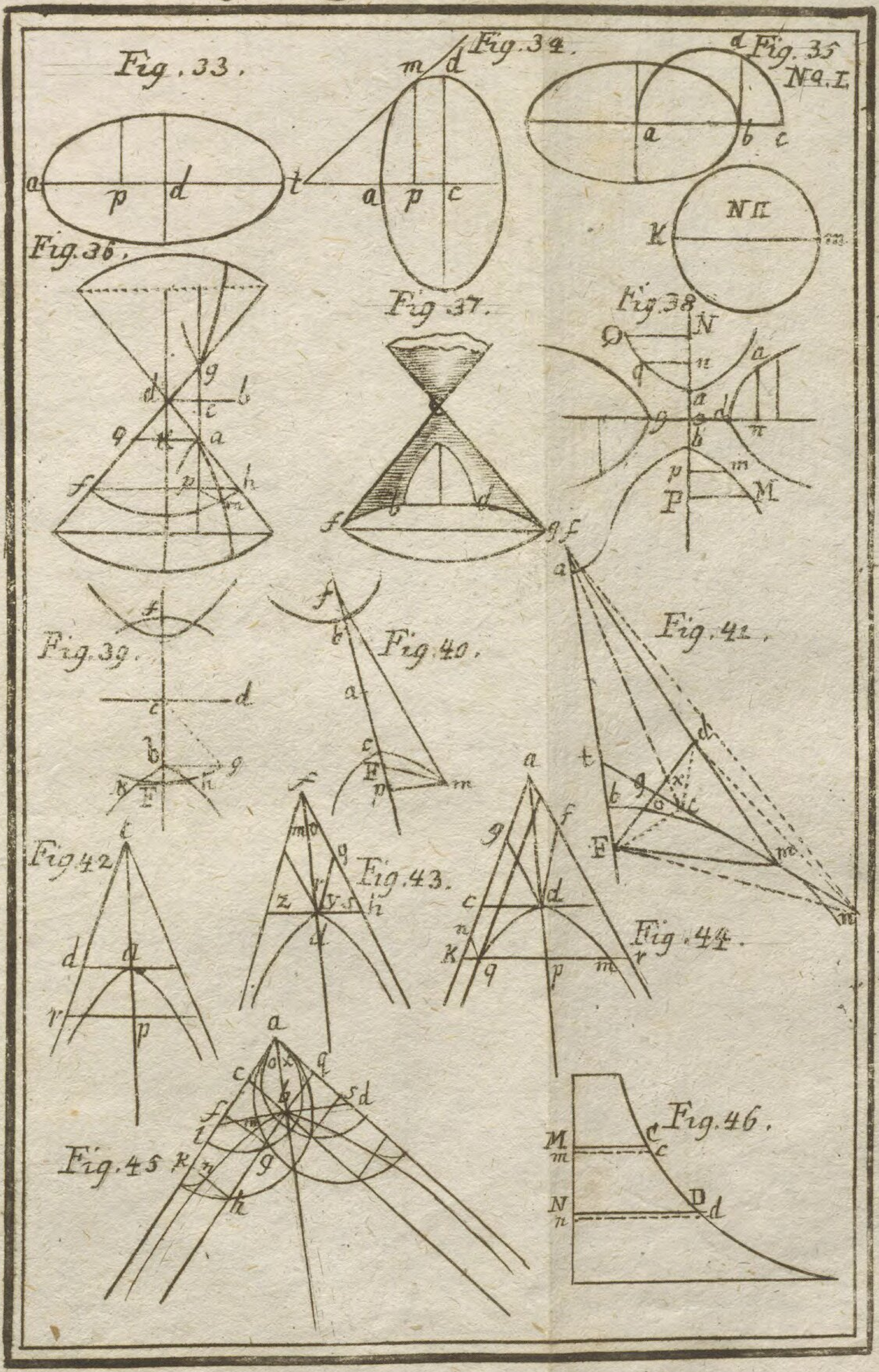
Erste Tafel zur höhern Mathematik.



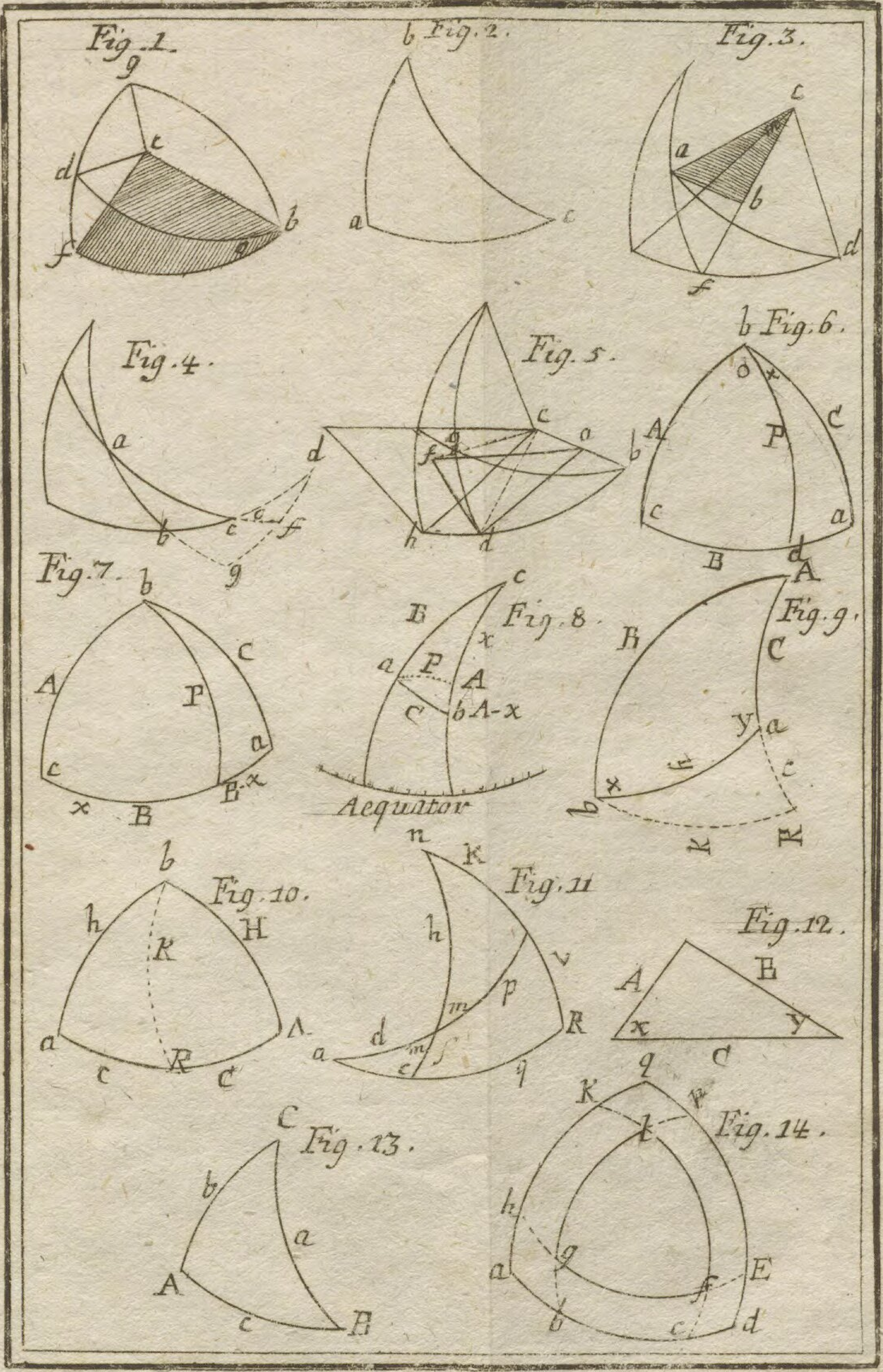
Zweite Tafel zur höhern Mathematik.



Dritte Tafel zur höhern Mathematik.



Zur Kugeldreyeckslehre.



f Q f Q
180 80 x 50

f x | 50 Q
Q 40 | 180
4 | 9

4 5/11 1/4
4/324
43

4 900/1
88

f Q f Q
180 80 x 50

f x | 8 Q
Q 80 | 180 f
32
50

900/122
88 32
90

f Q f Q
180 80 x 8

Q x | 15 f
f 180 | 80

64 144 | 16
88

120/6
1882
10 8
12

26 2/3

Hau.

$ab = S = 2x.$

$\triangle afg \cong gmd$

$o = m$ vertical

$x = \frac{p}{4}$

$fg = gd$ wegen Theilung

denn x steht auf af. u. dm rechtwinklig

$af = dm$

$dm = fm$ gleichschenkl. $\triangle$

$fm = x + \frac{1}{4}p.$

$af = fm = af = x + \frac{1}{4}p$

$S = ab = af + fb.$ aber $fb = bc - fc$

$bc = x = fc\ \frac{1}{4}p.$

subst. folgl. $fb = x - \frac{1}{4}p$

$S = x + \frac{1}{4}p + x - \frac{1}{4}p.$

$S = 2x.$

3 [illegible]

3 4 3. [illegible]

3 4 3 [illegible]

3 bey 2 [illegible]

x | 1½ 7

½ | 7 x

5 x

21
5 (4

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Joh. Georg Prändels Kugeldreyeckslehre und höhere Mathematik sammt ihrer kleinen Geschichte ; mit 4 Kupfertafeln

München 1793

Math.p. 441
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082611-0
VD18 15308421-001